Elementy Teorii Kategorii

Zadania Semestralne

Marek Zawadowski

17 stycznia 2008

Poniżej jest lista zadań semestralnych, które należy rozwiązać i oddać w formie pisemnej. Niektóre zadania maja kilka podpunktów o podobnej tematyce ale zróżnicowanej skali trudności. W takim przypadku **przysługuje Państwu możliwość wyboru**, który podpunkt zdecydują się Państwo rozwiązać.

1. Niech $f, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ będą funktorami, $\tau : F \to G$ transformacją naturalną. Wtedy
   (a) τ jest naturalnym izomorfizmem tzn. izomorfizmem w kategorii $Nat(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ wtedy i tylko wtedy gdy τ_c jest izomorfizmem (w $\mathcal{D}$) dla każdego $c \in Ob(\mathcal{C})$.
   (b) Gdy $\mathcal{D}$ jest kategorią Set to τ jest naturalnym epimorfizmem tzn. epimorfizmem w kategorii $Nat(\mathcal{C}, Set)$ wtedy i tylko wtedy gdy τ_c jest surjekcją (w Set) dla każdego $c \in Ob(\mathcal{C})$.

2. Przedstaw granicę diagramu

$$\begin{tikzcd}
A_0 \arrow[dr, "f_1"'] & & A_2 \arrow[dl, "f_2"] \arrow[dr, "f_3"'] & & A_4 \arrow[dl, shift right, "f_4"'] \arrow[dl, shift left, "f_5"] \\
& A_1 & & A_3 &
\end{tikzcd}$$

   przy pomocy produktów i ekwalizatorów.

3. Pokaż, że jeżeli funktor $G : \mathcal{A} \to Set$ ma lewy sprzężony to jest reprezentowalny.

4. Niech $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ i $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ będzie parą funktorów sprzężonych $F \dashv G$ z jednością $\eta : 1_{\mathcal{A}} \to GF$ i kojednością $\varepsilon : FG \to 1_{\mathcal{B}}$. Niech $Fix(\mathcal{A})$ będzie podkategorią pełną $\mathcal{A}$ do której należą te obiekty $a \in \mathcal{A}$, dla których jedność $\eta_a : a \to GF(a)$ jest izomorfizmem. Niech $Fix(\mathcal{B})$ będzie podkategorią pełną $\mathcal{B}$ do której należą te obiekty $b \in \mathcal{B}$, dla których kojedność $\varepsilon_b : FG(b) \to b$ jest izomorfizmem. Pokaż, że powyższe sprzężenie obcina się do równoważności kategorii $Fix(\mathcal{A})$ i $Fix(\mathcal{B})$.

5. Opisz produkty i koprodukty (binarne) w kategorii
   (a) grup abelowych Ab;
   (b) pierścieni przemiennych $CRng$. Wskazówka: Sprawdź, że koprodukty to iloczyny tensorowe nad pierścieniem liczb całkowitych Z.

6. Pokaż, że funktor zapominania
   (a) $U_1 : Rng \to Ab$, zapominający o mnożeniu z kategorii pierścieni do kategorii grup abelowych

(b) $U_2 : Rng \to Mon$, zapominający o dodawaniu z kategorii pierścieni do kategorii monoidów

(c) $U_3 : Cat \to Graf$, zapominający o mnożeniu i identycznościach z kategorii małych kategorii do kategorii grafów

ma lewy sprzężony.

Przez graf rozumiemy parę zbiorów E i V oraz parę funkcji $d, c : E \to V$ przyporządkowujących krawędziom z E ich końce w zbiorze wierzchołków V. Morfizmy, to pary funkcji przyporzadkowujące krawędzie krawędziom, wierzchołki wierzchołkom i zachowujące dziedziny oraz przeciwdziedziny. Czyli graf jest kategorią równoważną z kategorią $Set^{\mathcal{C}}$, gdzie $\mathcal{C}$ jest kategorią

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

Funktor U_3 kategorii małej (C_1, C_0, d, c, i, m) przyporządkowuje jej 'graf podkładowy' (C_1, C_0, d, c).

7. Pokaż, że kategoria

   (a) $Set^{\mathcal{C}^{op}}$,

   (b) $Set^{\to}$,

   (c) przestrzeni ciągowych w sensie Kuratowskiego,

   jest kartezjańsko domknięta. $\to$ jest kategorią mającą dwa obiekty i jeden morfizm nieidentycznościowy:

   $$\bullet \longrightarrow \bullet$$

   Przestrzenią ciągową w sensie Kuratowskiego nazywamy zbiór X wraz z funkcją częściową $\lim : X^\omega \to X$. Jeśli $lim_{n\in\omega} x_n$ jest określona to ciąg $\{x_n\}_{n\in\omega}$ nazywamy zbieżnym. Ponadto spełnione są następujące aksjomaty.

   (a) $lim_{n\in\omega} x_= x$ (granica ciągu stałego równego x jest równa x).

   (b) Jeśli granica ciągu jest równa x to granica każdego jego podciągu też jest równa x.

   (c) Jeśli każdy podciąg ciągu $\{x_n\}_{n\in\omega}$ zawiera podciąg który jest zbieżny to cały ciąg $\{x_n\}_{n\in\omega}$ też jest zbieżny.

   Morfizm przestrzeni ciągowych w sensie Kuratowskiego $f : (X, \lim) \to (Y, \lim)$ jest to funkcja $f : X \to Y$ zachowująca granice, tzn. jeśli $lim_{n\in\omega} x_n = x$ to $lim_{n\in\omega} f(x_n) = f(x)$ dla dowolnego ciągu z X^ω.

8. Pokaż, że kategoria grup (wewnętrznych) w kategorii grup jest równoważna z kategorią grup abelowych.

9. Niech $\mathcal{P} : Set \to Set^{op}$ będzie funktorem zbioru potęgowego, tzn. dla $f : A \to B$ w Set mamy $\mathcal{P}(f) = f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$, a $\mathcal{P}^{op}$ będzie funktorem dualnym, tzn. 'tym samym funktorem' ale oreślonym na dualnych kategoriach $\mathcal{P}^{op} : Set^{op} \to Set$. Pokaż, że $\mathcal{P} \dashv \mathcal{P}^{op}$.

10. Dla jakich zbiorów X funktor

    (a) $X \times (-) : Set \to Set$ ma lewy sprzężony.

    (b) $(-)^X : Set \to Set$ ma prawy sprzężony.