

Elementy Teorii Kategorii

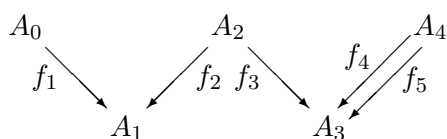
Zadania Semestralne

Marek Zawadowski

17 stycznia 2008

Poniżej jest lista zadań semestralnych, które należy rozwiązać i oddać w formie pisemnej. Niektóre zadania mają kilka podpunktów o podobnej tematyce ale zróżnicowanej skali trudności. W takim przypadku **przysługuje Państwu możliwość wyboru**, który podpunkt zdecydują się Państwo rozwiązać.

- Niech $f, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ będą funktorami, $\tau : F \rightarrow G$ transformacją naturalną. Wtedy
 - τ jest naturalnym izomorfizmem tzn. izomorfizmem w kategorii $Nat(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ wtedy i tylko wtedy gdy τ_c jest izomorfizmem (w \mathcal{D}) dla każdego $c \in Ob(\mathcal{C})$.
 - Gdy \mathcal{D} jest kategorią Set to τ jest naturalnym epimorfizmem tzn. epimorfizmem w kategorii $Nat(\mathcal{C}, Set)$ wtedy i tylko wtedy gdy τ_c jest surjekcją (w Set) dla każdego $c \in Ob(\mathcal{C})$.
- Przedstaw granicę diagramu



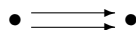
przy pomocy produktów i ekwalizatorów.

- Pokaż, że jeżeli funktor $G : \mathcal{A} \rightarrow Set$ ma lewy sprzężony to jest reprezentowalny.
- Niech $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ i $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ będzie parą funktorów sprzężonych $F \dashv G$ z jednością $\eta : 1_{\mathcal{A}} \rightarrow GF$ i kojednością $\varepsilon : FG \rightarrow 1_{\mathcal{B}}$. Niech $Fix(\mathcal{A})$ będzie podkategorią pełną \mathcal{A} do której należą te obiekty $a \in \mathcal{A}$, dla których jedność $\eta_a : a \rightarrow GF(a)$ jest izomorfizmem. Niech $Fix(\mathcal{B})$ będzie podkategorią pełną \mathcal{B} do której należą te obiekty $b \in \mathcal{B}$, dla których kojedność $\varepsilon_b : FG(b) \rightarrow b$ jest izomorfizmem. Pokaż, że powyższe sprzężenie obcina się do równoważności kategorii $Fix(\mathcal{A})$ i $Fix(\mathcal{B})$.
- Opisz produkty i koprodukty (binarne) w kategorii
 - grup abelowych Ab ;
 - pierścieni przemiennych $CRng$. Wskazówka: Sprawdź, że koprodukty to iloczyny tensorowe nad pierścieniem liczb całkowitych Z .
- Pokaż, że funktor zapominania
 - $U_1 : Rng \rightarrow Ab$, zapominający o mnożeniu z kategorii pierścieni do kategorii grup abelowych

- (b) $U_2 : Rng \rightarrow Mon$, zapominający o dodawaniu z kategorii pierścieni do kategorii monoidów
- (c) $U_3 : Cat \rightarrow Graf$, zapominający o mnożeniu i identycznościach z kategorii małych kategorii do kategorii grafów

ma lewy sprzężony.

Przez graf rozumiemy parę zbiorów E i V oraz parę funkcji $d, c : E \rightarrow V$ przyporządkowujących krawędziom z E ich końce w zbiorze wierzchołków V . Morfizmy, to pary funkcji przyporządkowujące krawędzie krawędziom, wierzchołki wierzchołkom i zachowujące dziedziny oraz przeciwdziedziny. Czyli graf jest kategorią równoważną z kategorią $Set^{\mathcal{C}}$, gdzie \mathcal{C} jest kategorią



Funktor U_3 kategorii małej (C_1, C_0, d, c, i, m) przyporządkowuje jej 'graf podkładowy' (C_1, C_0, d, c) .

7. Pokaż, że kategoria

- (a) $Set^{C^{op}}$,
- (b) Set^{\rightarrow} ,
- (c) przestrzeni ciągowych w sensie Kuratowskiego,

jest kartezjańsko domknięta. \rightarrow jest kategorią mającą dwa obiekty i jeden morfizm nieidentycznościowy:



Przestrzeń ciągową w sensie Kuratowskiego nazywamy zbiór X wraz z funkcją częściową $\lim : X^\omega \rightarrow X$. Jeśli $\lim_{n \in \omega} x_n$ jest określona to ciąg $\{x_n\}_{n \in \omega}$ nazywamy zbieżnym. Ponadto spełnione są następujące aksjomaty.

- (a) $\lim_{n \in \omega} x = x$ (granica ciągu stałego równego x jest równa x).
- (b) Jeśli granica ciągu jest równa x to granica każdego jego podciągu też jest równa x .
- (c) Jeśli każdy podciąg ciągu $\{x_n\}_{n \in \omega}$ zawiera podciąg który jest zbieżny to cały ciąg $\{x_n\}_{n \in \omega}$ też jest zbieżny.

Morfizm przestrzeni ciągowych w sensie Kuratowskiego $f : (X, \lim) \rightarrow (Y, \lim)$ jest to funkcja $f : X \rightarrow Y$ zachowująca granice, tzn. jeśli $\lim_{n \in \omega} x_n = x$ to $\lim_{n \in \omega} f(x_n) = f(x)$ dla dowolnego ciągu z X^ω .

- 8. Pokaż, że kategoria grup (wewnętrznych) w kategorii grup jest równoważna z kategorią grup abelowych.
- 9. Niech $\mathcal{P} : Set \rightarrow Set^{op}$ będzie funktorem zbioru potęgowego, tzn. dla $f : A \rightarrow B$ w Set mamy $\mathcal{P}(f) = f^{-1} : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, a \mathcal{P}^{op} będzie funktorem dualnym, tzn. 'tym samym funktorem' ale określonym na dualnych kategoriach $\mathcal{P}^{op} : Set^{op} \rightarrow Set$. Pokaż, że $\mathcal{P} \dashv \mathcal{P}^{op}$.
- 10. Dla jakich zbiorów X funktor
 - (a) $X \times (-) : Set \rightarrow Set$ ma lewy sprzężony.
 - (b) $(-)^X : Set \rightarrow Set$ ma prawy sprzężony.