Zadania domowe ze Wstępu do Matematyki
Grupa 5. Seria 12. Termin oddania 9.01.2013.

Uwaga. Zadania z tej serii to zadania dodatkowe które można zrobić by poprawić swój dorobek punktowy. Nie zrobienie tych zadań dodatkowych nie powoduje żadnych negatywnych konsekwencji. Nie liczą się one do ogólnej liczby punktów które można zdobyć.

Zadanie 1.
Określamy relację r na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tak, że

$$f\ r\ g \quad \text{gdy} \quad \exists_{k\in\mathbb{N}}\forall_{n>k} f(n) = g(n)$$

dla $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

1. Udowodnij, że r jest relacją równoważności.
2. Oblicz moc klasy abstrakcji funkcji identycznościowej $id_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
3. Oblicz moc zbioru ilorazowego $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}})_{/r}$.

Zadanie 2.
Niech X, Y zbiory oraz $X \subseteq Y$. Określamy relację r na zbiorze $\mathcal{P}(Y)$ tak, że

$$A\ r\ B \quad \text{gdy} \quad (A \triangle B) \subseteq X$$

dla $A, B \in \mathcal{P}(Y)$. Operacja $\triangle$ oznacza różnicę symetryczną.

1. Udowodnij, że r jest relacją równoważności.
2. Oblicz moce klas abstrakcji zbiorów X i Y.
3. Pokaż, że zbiór ilorazowy $(\mathcal{P}(Y))_{/r}$ jest równoliczny z $\mathcal{P}(Y - X)$.

Zadanie 3.
Niech $\{r_i\}_{i\in I}$ zbiór relacji równoważności na zbiorze X, $r = \bigcap_{i\in I} r_i$. Pokaż, że

1. r jest relacją równoważności;
2. $[x]_r = \bigcap_{i\in I}[x]_{r_i}$;
3. dla dowolnej relacji $s \subseteq X \times X$ istnieje najmniejsza relacja równoważności zawierająca s.

Zadanie 4.
Dana jest para relacji równoważności r, s na zbiorze X. Pokaż, że jeśli $r \circ s = s \circ r$ to $r \circ s$ jest najmniejszą relacją równoważności zawierającą r i s.

Zadanie 5.
Podaj przykład nieskończonego zbioru X i relacji równoważności r, s na X takich, że $r \not\subseteq s$, $s \not\subseteq r$ oraz $r \circ s = s \circ r$.