Zad. 1 Niech Z będzie jak w treści zadania. Załóżmy, że Z jest niepusty. B.o.o. $\emptyset \notin Z$. (w przeciwnym przypadku rozważalibyśmy $Z' = Z \setminus \emptyset$, gdyż jeśli pokażemy, że Z' jest co najwyżej przeliczalny to teza będzie wynikała z faktu, ze suma zbioru co najwyżej przeliczalnego i zbioru skończonego jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym). Pokażemy, że istnieje surjekcja $f : \mathbb{N} \to Z$. Ustalmy $K \subseteq \mathbb{N},\quad K \in Z$. Niech f będzie zdefiniowana następująco: dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$f(n) = \begin{matrix} K \quad wtw. \quad (\forall_{M \in Z} n \notin M) \vee n \in K \\ M \quad wtw. \quad \exists_{L \in Z}(n \in L \wedge L = M \wedge L \neq K) \end{matrix}$$

Łatwo zauważyć, że funkcja f jest zdefiniowana poprawnie: warunki $\forall_{M \in Z} n \notin M$ i $\exists_{L \in Z} n \in L$ wzajemnie się wykluczają i ponadto wiemy, że (dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$) jeśli istnieje element Z do którego należy n, to istnieje dokładnie jeden taki element Z (bo elementy Z mają puste przecięcia). Zatem f jest określona dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Łatwo sprawdzić, że f surjekcją.

$\square$

Zad.2 *Uwaga* Kulę o środku w a i promieniu r będziemy oznaczać $B(a, r)$. Średnicą zbioru $A \subseteq \mathbb{R}^2$ nazywamy liczbę $sup_{x,y \in A}\|x - y\|$ i oznaczamy ją przez diam$A$. ($\| \cdot \|$ oznacza normę euklidesową w $\mathbb{R}^2$; pojęcie średnicy zbioru oczywiście uogólnia się na wyższe wymiary.)
Niech $A, C \subseteq \mathbb{R}^2$ będą takie, że dla pewnych $a = (a_1, a_2), c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2, r, r' \in \mathbb{R},\quad r, r' > 0$,

$$B(a, r) \subseteq A, \quad B(c, r') \subseteq C.$$

(B.s.o. mozemy też przyjąć, że A i C są ograniczone. W przeciwnym przypadku składalibyśmy funkcję poniżej z funkcją $g(x, y) = (arctg(x), arctg(y))$.)
Pokażemy, że istnieją różnowartościowe funkcje $f : A \to C$ i $g : C \to A$, co oczywiście da nam tezę zadania na mocy twierdzenia Cantora-Bernsteina. Niech $p =$diam$A$, $q =$diam$C$ (*Uwaga*: $p, q > 0$, bo $p \geqslant 2r > 0, q \geqslant 2r' > 0$). Połóżmy

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad h((x, y)) = \frac{r'}{p}((x, y) - (a_1, a_2)) + (c_1, c_2).$$

Łatwo sprawdzić, że
(1) h jest różnowartościowe (złożenie przekształceń różnowartościowych jest różnowartościowe),
(2) $h((a_1, a_2)) = (c_1, c_2)$, oraz
(3) diam$h[A] = r'$ (przesunięcia nie zmieniają długości wektorów),
przeto $h[A] \subseteq C$. Połóżmy $f : A \to C, f = h|_A$. Analogicznie określamy $g : C \to A$.

$\square$