Euler i liczba e

P. Wojtaszczyk

29 grudnia 2006

Liczba e, podstawa logarytmów naturalnych występowała w matematyce na sto co najmniej lat przed publikacją Eulera [1]. W tej fundamentalnej monografii (obok wielu innych tematów) wiele miejsca poświęcił Euler liczbie e i jej licznym zastosowaniom. Euler wiedział, że

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^{1/n} = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{n!} \tag{1}$$

oraz że $\left(e^x\right)' = e^x$. To właśnie spowodowało, że podstawowe znaczenie przypisał logarytmom naturalnym (i.e. o bazie e) oraz funkcji eksponencjalnej e^x. Żeby podkreślić wagę tej liczby Euler nadał jej specjalną do dziś stosowaną nazwę, właśnie e. Oczywiście dla dowolnego rzeczywistego x mamy

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{x}{n}\right)^{1/n} = \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{x^n}{n!} \tag{2}$$

Należy pamiętać, że Euler nie znał współczesnej ścisłości analizy matematycznej i aparatu δ–ϵ, genialnie natomiast operował formułami. Niezbyt przejmując się istnieniem $\sqrt{-1}$[1] wstawił $x\sqrt{-1}$ w (2) i wyszło mu

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \cdot \sin x. \tag{3}$$

Stąd już tylko krok do sławnej formuły

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1. \tag{4}$$

Innym cenionym obecnie wynikiem Eulera o liczbie e jest jej niewymierność. Wydaje mi się jednak, że Eulera niezbyt ten fakt interesował; w pierwszym tomie [1] gdzie jest on udowodniony nie jest on jasno sformułowany. To co Eulera bardzo interesowało to przybliżone rozwiązań równań czy też efektywne wyliczanie przybliżeń konkretnych liczb, między innymi liczby e. W tym celu w Rozdziale XVIII [1] przedstawił teorię ułamków łańcuchowych i podał oszacowania błędów jakie popełniamy urywając ułamek łancuchowy w pewnym miejscu.

Euler zauważył, że naturalny schemat wyliczania wartości ułamka łańcuchowego prowadzi do szeregu naprzemiennego, oraz odwrotnie—sumę szeregu

[1] Z szacunku dla Eulera w tym artykule używać będę tak jak on notacji $\sqrt{-1}$. Jako ciekawostkę podam że literą i oznaczał on "wielkość nieskończenie dużą" tak więc pierwsza równość w (1) w [1] wyglądała $e = (1 + 1/i)^i$.

naprzemiennego można przedstawić jako ułamek łańcuchowy. Ponieważ z (2) mamy $1/e = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n!}$ więc stosując swoją metodę Euler otrzymał

$$\frac{e-1}{e} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \dots}}}}} \tag{5}$$

Sam Euler uznał za najważniejsze ułamki łańcuchowe postaci

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots}}}} \tag{6}$$

gdzie $a_o, a_1, \dots$ to liczby naturalne $\geqslant 1$. Podał on sposób rozkładu dowolnej dodatniej liczby wymiernej na ułamek skończony postaci (6). Dla liczby e udowodnił w [2] i powtórzył w [1] rozkład[2]

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \dots}}}} \tag{7}$$

Podkreślić należy, że liczby tutaj występujące (poza pierwszą) tworzą nieskończony postęp arytmetyczny. Jeśli uwzględnimy łatwą do udowodnienia jedyność rozkładu liczby dodatniej na ułamek łancuchowy postaci (6) łatwo widzimy, że liczba e musi być niewymierna.

Standardowy obecnie dowód niewymierności liczby e używający szeregu (1) został najprawdopodobniej podany przez J. Fouriera, a więc jest o około sto lat późniejszy od naszkicowanego wyżej. Jest on następujący. Niech $e = p/q$ gdzie p i q naturalne. Mnożąc (1) przez $q!$ otrzymamy

$$p(q-1)! = \Big(\sum_{n=0}^{q} \frac{q!}{n!}\Big) + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \dots$$

gdzie jasne jest, że lewa strona oraz nawias po prawej są liczbami naturalnymi. To co pozostało po prawej stronie jest więc też liczbą naturalną i jest oczywiście > 0 oraz

$$< \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q+1}\right)^k = \frac{1}{q} \leqslant 1.$$

Otrzymaliśmy więc jawną sprzeczność.

Ciekawą książką o liczbie e jest [3].

[2]Niestety pracy [2] nie czytałem a w [1] Euler wylicza tą równość do sześciu kresek ułamkowych z wartości e podanej z dokładnością do 12 miejsc dziesiętnych. O nieskończonym rozwinięciu pisze że "uzasadnić je można za pomocą rachunku nieskończonych"

Literatura

[1] Leonhard Euler, *Introductio in analysis infinitorum* Lausanne 1748

[2] Leonhard Euler, *De functionibus continuis*, Comment. acad. sc. Petrop. 9(1737)

[3] Eli Maor, *e The story of a Number*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994