Algorytmy i Struktury Danych, 11. ćwiczenia

2024-12-18

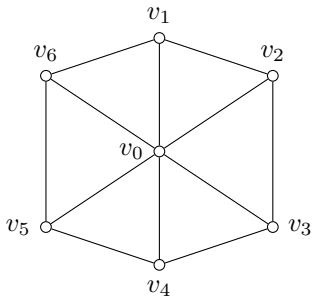
Zadanie 9.1

a) Niech G będzie grafem $n+1$ wierzchołkowym, $n > 4$, w którym jeden wierzchołek jest połączony ze wszystkimi innymi, a podgraf rozpięty na pozostałych n wierzchołkach jest cyklem elementarnym. Ile jest różnych drzew przeszukiwania w głąb w grafie G – dwa drzewa się różnią, jeśli istnieje wierzchołek, który w obu drzewach ma różnych rodziców. Opisz sposób obliczania tej liczby.

b) Niech $G = (V, E)$ będzie grafem dwuspójnym o co najmniej trzech wierzchołkach, a u jego wyróżnionym wierzchołkiem. Dobrą orientacją grafu G z wierzchołka u nazywamy graf skierowany otrzymany z G w następujący sposób: uruchomiamy algorytm przeszukiwania w głąb z wierzchołka u, a następnie orientujemy krawędzie drzewa przeszukiwania od ojca do syna, a krawędzie niedrzewowe od potomka do przodka. Dany jest graf zorientowany H z wyróżnionym wierzchołkiem u. Zaproponuj algorytm, który stwierdzi, czy H jest dobrą orientacją pewnego grafu G z wierzchołka u.

Rozwiązanie:
Punkt a)

Przykładowy graf dla $n = 5$:



Wynik to: $n(n-1)^2 + 2n$:

- $2n$ dla drzew rozpoczynających się w centrum grafu (korzeń jest ustalony na v_0, możemy na n sposobów wybrać pierwszy wierzchołek z cyklu v_i na dwa sposoby możemy wybrać kierunek w którym kontynuujemy DFS)
- $n \cdot (n-1)^2$ dla drzew rozpoczynających się na cyklu:

- $2n \cdot \sum_{j=2}^{n-2}(n-1-j)$ — $i \neq j$ i $(v_i, v_j) \notin E$: zaczynamy w v_i idziemy do v_j (idąc w lewo lub w prawo) idziemy do v_0 a następnie do v_k,
- $2n \cdot (n-2)$ — $i \neq j$ i $(v_i, v_j) \in E$ (i używamy tej krawędzi): zaczynamy w v_i idziemy do v_j (idąc po 1 krawędzi) idziemy do v_0 a następnie do v_k,
- n — $i \neq j$ i $(v_i, v_j) \in E$ (i NIE używamy tej krawędzi): zaczynamy w v_i idziemy do v_j (idąc po n-1 krawędziach) idziemy do v_0 i kończymy
- $n(n-1)$ — $i = j$: zaczynamy w v_i idziemy do v_0 a następnie do v_k następnie DFS odwiedza resztę cyklu.

Punkt b)

Wszystkie krawędzie powrotne muszą prowadzić do przodków w drzewie.

Zadanie 9.2

Dane jest drzewo z korzeniem T, które jest DFS-drzewem rozpinającym pewnego n-wierzchołkowego grafu G. Wierzchołki drzewa są identyfikowane z ich numerami DFS wyznaczających kolejność ich pierwszych odwiedzin. Dla każdego wierzchołka i różnego od korzenia, $t[i]$ jest numerem rodzica i w drzewie T. Wartość $t[.]$ dla korzenia jest równa 0. Zaproponuj efektywny algorytm, który

a) sprawdzi, czy graf G może być grafem dwuspójnym wierzchołkowo, a jeśli odpowiedź jest pozytywna, to poda

b) minimalną liczbę krawędzi w grafie G,

c) maksymalną liczbę krawędzi w grafie G.

Rozwiązanie: Punkt a) Jeśli korzeń T ma więcej niż jednego syna to G nie jest dwuspójny.
Punkt b) każdy liść musi mieć jakąś krawędz powrotną, jeśli połączymy każdy liść z korzeniem to spełnimy wszystkie warunki dwuspójności, odpowiedź: $(n-1+L)$ gdzie L to liczba liści.
Punkt c) oprócz krawędzi z punktu b możemy dodać wszystkie, które nie naruszają DFS, czyli wszystkie do przodków w drzewie DFS.

Zadanie 9.3

Marszrutą w grafie G nazywamy każdy skończony ciąg wierzchołków grafu taki, że każde dwa kolejne wierzchołki są połączone krawędzią w tym grafie. Marszruta jest zamknięta, gdy rozpoczyna się i kończy w tym samym wierzchołku.

Powiemy, że graf G jest eulerowski, jeśli istnieje w nim marszruta zamknięta, w której każda krawędź z grafu pojawia się dokładnie raz. Marszrutę o takiej własności nazywamy cyklem Eulera.

Zaproponuj algorytm, który w czasie liniowym sprawdza, czy dany graf nieskierowany jest eulerowski i jeśli tak, to znajduje w nim cykl Eulera.

Rozwiązanie:
Cykl Eulera w grafie skierowanym G istnieje wtedy i tylko wtedy gdy:

- dla każdego wierzchołka $v \in V(G)$ mamy $indeg(v) = outdeg(v)$.
- nieskierowana wersja grafu G (tzn. taka w której ignorujemy zwrot krawędzi), jest spójna,

Algorytm:

- $C = \emptyset$
- tak długo jak G nie jest pusty, oblicz dowolny cykl i dołącz go do C,

Zadanie 9.4

Dane jest n-wierzchołkowe drzewo z korzeniem T z wagami na krawędziach (liczby całkowite). Dla każdego wierzchołka v różnego od korzenia dane są rodzic $p[v]$ w drzewie i waga $w[v]$ krawędzi $v - p[v]$. Przyjmujemy też, że wierzchołki są ponumerowane w porządku "preorder" i utożsamiamy je z tymi numerami - v oznacza zarówno wierzchołek, jak i jego numer.

Zaproponuj algorytm, który w czasie $O(n+k)$ udzieli odpowiedzi na k zapytań postaci:

$W(u; v)$**::** ile wynosi waga ścieżki (suma wag krawędzi na ścieżce) z u do v, gdy wiadomo, że u jest przodkiem v?

Rozwiązanie:

- policz $s[u]$ — suma waga na krawędziach na ścieżce od u do korzenia,
- $W(u, v) = s[v] - s[u]$

Zadanie 9.5

Kaktusem nazywamy graf, w którym każda dwuspójna składowa jest krawędzią lub cyklem.

a) Zaprojektuj wydajny czasowo algorytm, który dla danego kaktusa G i wskazanych wierzchołków u i v obliczy liczbę różnych ścieżek elementarnych z u do v.

b) Załóżmy, że krawędziom kaktusa przypisano całkowitoliczbowe wagi. Zaprojektuj wydajny czasowo algorytm, który w ważonym kaktusie $G = (V, E)$ znajduje minimalną wagę DFS drzewa rozpinającego zakorzenionego w zadanym wierzchołku s.

Uwaga: DFS drzewo rozpinające, to drzewo ukorzenione i takie, że krawędzie niedrzewowe łączą tylko potomków z przodkami w tym drzewie.

Zadanie 9.6

Grafy trójkątne to grafy spójne, w których każda dwuspójna składowa jest trójkątem (cyklem długości 3).

a) Udowodnij, że każdy graf trójkątny jest 3-kolorowalny.

b) Zaproponuj efektywny algorytm 3-kolorowania grafów trójkątnych.

c) Zaproponuj efektywny algorytm obliczania rozmiaru najliczniejszego skojarzenia w danym grafie trójkątnym.

Rozwiązanie: Punkt a) Znajdź dowolny "zewnętrzny" trójkąt v_1, v_2, v_3. Pokoloruj rekurencyjnie graf po usunięciu krawędzi $(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_1)$ i izolowanych wierzchołków. Takie pokolorowanie można łatwo uzupełnić o kolorowanie v_1, v_2, v_3 gdyż co najwyżej jeden z wierzchołków otrzymał kolor, więc pozostałe możemy pokolorować pozostałymi dwoma wolnymi kolorami.

Punkt b) Policz drzewo DFS grafu G, zauważmy, że w grafie trójkątnym wszystkie krawędzie powrotne (u, v) łączą wierzchołki o różnicy wysokości dokładnie 2 ($h[u] - h[v] = 2$). Więc jeśli nadamy wierzchołkom kolory $c(v) = h[v] \mod 3$ otrzymamy poprawne kolorowanie

Punkt c) Jak w dowodzie a) tylko dodajemy do skojarzenia krawędź z trójkąta, która nie sąsiaduje z pozostałym grafem.

Zadanie 10.1

Dany jest (przez listy sąsiedztwa) graf $G = (V, E)$ z wyróżnionym wierzchołkiem s. Dodatkowo każdemu wierzchołkowi przypisano dodatnią liczbę całkowitą. Zaprojektuj wydajny algorytm, który znajdzie w G najdłuższą ścieżkę o początku w s, na której liczby przypisane wierzchołkom tworzą ściśle malejący ciąg.

Rozwiązanie: Niech $f : V \to N$ oznacza funkcję, która przypisuje dla każdego wierzchołka liczbę całkowitą. Tworzymy graf $G' = (V, E')$, gdzie

$$E' = \{(u, v) \in E : f(u) > f(v)\}$$

Graf G' to **acykliczny graf skierowany** (DAG) a w nim łatwo policzyć najdłuższą ścieżkę:

Algorytm 1: Obliczanie najdłuższych ścieżek

Input: Acykliczny graf skierowany $G' = (V, E')$
Input: Tablica d zawierająca długość najdłuższej ścieżki rozpoczynającej się w danym wierzchołku
Posortuj topologicznie wierzchołki $V = (v_1, \ldots, v_n)$
foreach $i = n, \ldots, 1$ **do**
  $d[v_i] = \max(\{0\} \cup \{d[u] + 1 : (v_i, u) \in E'\})$

Złożoność czasowa i pamięciowa $O(|V| + |E|)$.

Zadanie 10.2

Skierowany graf $G = (\{1, 2, ..., n\}, E)$ nazywamy grafem przedziałowym, jeśli dla każdego wierzchołka v zbiór (numerów) wierzchołków, do których prowadzą krawędzie z v, jest przedziałem domkniętym $[l[v], r[v]]$, dla pewnych $1 \leq l[v] \leq r[v] \leq n$. W grafie mogą być pętle. Jeśli żadna krawędź nie wychodzi z v wówczas $l[v] = r[v] = 0$. Liczbę n i ciąg par $l[v], r[v]$ nazywamy zwartą reprezentacją G, a liczbę n rozmiarem tej reprezentacji.
Dana jest zwarta reprezentacja pewnego grafu G.

a) Zaprojektuj algorytm, który sprawdzi, czy graf G po usunięciu wszystkich pętli jest drzewem z korzeniem o krawędziach zorientowanych od korzenia do liści.

b) Zaprojektuj algorytm, który sprawdza, czy G jest słabo spójny (po usunięciu orientacji na krawędziach graf jest spójny).

c) Zaprojektuj algorytm, który sprawdza, czy G jest eulerowski.

Rozwiązanie: Punkt a) Jeśli $\sum_{i=1}^{n}(r[i]+1-l[i]) > 2n$ to graf G nie jest drzewem (za dużo krawędzi). Wpp możemy w czasie liniowym utworzyć standardowa reprezentację grafu G (np. jako listy sąsiedztwa) i zweryfikować czy G jest drzewem.
Punkt b) Tworzymy nowy niezorientowany graf G', który będzie zawierał dwa rodzaje krawędzi:

- $(i, l[i])$ dla $i = 1, \ldots, n$ i $l[i] \neq 0$,
- $(j, j + 1)$ jeśli istnieje i takie, że $l[i] \leq j < j + 1 \leq r[i]$.

Krawędzie $(j, j + 1)$ możemy wyznaczyć gdy policzymy sumaryczne pokrycie prostej odcinkami $[l[i], r[i]]$. Graf G' jest spójny wtw gdy G jest słabo spójny. Graf G' ma $O(n)$ krawędzi, więc w czasie liniowym sprawdzimy czy jest spójny.
Punkt c) Sprawdź czy graf jest słabo spójny a następnie policz czy dla każdego wierzchołka $indeg[v] = outdeg[v]$. Stopnie wyjściowe można policzyć z wzoru:

$$outdeg[i] = r[i] + 1 - l[i]$$

Zauważmy, że nie musimy usuwać krawędzi typu (i, i).

Wartości *indeg* możemy policzyć korzystając z następującego algorytmu:

Algorytm 2: Obliczanie *indeg*

Input: n i tablice $l[i]/r[i]$
Output: tablica *indeg*
$A[0, \ldots, n + 1] = 0$
foreach $i = 1, \ldots, n$ **do**
  $A[l[i]] += 1$
  $A[r[i] + 1] -= 1$
Policz sumy prefiksowe: $indeg[i] = \sum_{j=0}^{i} A[i]$

Zadanie 10.3

Niech n będzie liczbą całkowitą większą od 2 i niech J będzie rodziną co najwyżej n różnych, domkniętych przedziałów liczb całkowitych zawartych w przedziale $[1, n]$. Grafem $G(n, J)$ nazywamy graf ($\{1, 2, ..., n\}$, $\{i - j$: istnieje przedział w J, do którego wpadają obie liczby (oba wierzchołki) i oraz $j\}$).

a) Ile jest różnych drzew BFS o korzeniu w wierzchołku 1 w grafie $G(8, J)$ dla $J = \{[1, 4], [3, 6], [5, 8]\}$?

b) Ile jest różnych drzew DFS o korzeniu w wierzchołku 1 w grafie $G(6, J)$ dla $J = \{[1, 4], [3, 6]\}$?

c) Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla danej liczby całkowitej $n > 2$ oraz rodziny co najwyżej n różnych przedziałów J zawartych w przedziale $[1, n]$ obliczy wysokość BFS drzewa w grafie $G(n, J)$, o korzeniu w wierzchołku 1.

d) Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla danej liczby całkowitej $n > 2$ oraz rodziny co najwyżej n różnych przedziałów J zawartych w przedziale $[1, n]$, obliczy liczbę dwuspójnych składowych w grafie $G(n, J)$.

Uwaga: na potrzeby tego zadania dwa drzewa przeszukiwania różnią się wtedy, gdy istnieje wierzchołek, który w obu drzewach ma różnych ojców.

Rozwiązanie: Punkt c) Zauważmy, że jeśli $u \leq v$ to $\mathsf{depth}[u] \leq \mathsf{depth}[v]$. Stąd jeśli obliczymy dla każdego wierzchołka $\mathsf{left}[v] = \min\{u : (u, v') \in J \text{ oraz } v' > v\}$ to możemy policzyć głębokość każdego wierzchołka (w drzewie BFS) korzystając z następującego wzoru:

$$\mathsf{depth}[u] = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } u = 1 \\ \mathsf{depth}[\mathsf{left}[u]] + 1 & \text{wpp} \end{cases}$$

Zadanie 10.4

Zaprojektuj wydajny algorytm, który sprawdzi, czy w danym silnie spójnym grafie istnieje zamknięta (zorientowana) marszruta o nieparzystej długości. Jeżeli odpowiedzią jest TAK, znajdź jedną z takich marszrut.

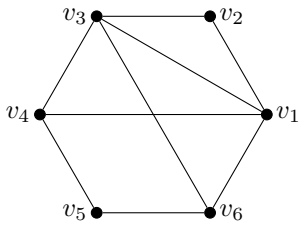
Rozwiązanie: Policz drzewo BFS z dowolnego wierzchołka s i dla każdego wierzchołka wyznacz jego głębokość w drzewie BFS $d[v]$. Niech (u, v) to krawędź taka, że $d[u] \not\equiv d[v]$ (mod 2):

- jeśli taka krawędź istnieje to odpowiedzią jest TAK, ponieważ możemy skonstruować następującą marszrutę:
  - niech P_u (P_v) to ścieżka $s \to u$ ($s \to v$) korzystająca z krawędzi drzewa BFS,
  - wyznacz (np. za pomocą DFS) dowolną ścieżkę $P = v \to s$,
  - niech $M_1 = P_u + uv + P$, $M_2 = P_v + P$
  - dokładnie jedna z marszrut M_1/M_2 ma nieparzystą długość
- jeśli krawędź nie istnieje to graf jest dwudzielny więc odpowiedzią jest NIE.

Zadanie 10.5

Dany jest n-kąt wypukły W, którego wierzchołki są ponumerowane $1, 2, \ldots, n$ w kolejności ich występowania na obwodzie, $n > 2$. Ponadto danych jest k przekątnych w wielokącie W. Zaprojektuj wydajny algorytm, które sprawdza, czy istnieje para przecinających się przekątnych we wnętrzu wielokąta.

Rozwiązanie:



Rysunek 1: Przykład wielokąta z przekątnymi $(1,3)$, $(1,4)$ i $(3,6)$

Zadanie sprowadza się do sprawdzenia czy istnieją dwa (niedomknięte) przedziały $I_1 = (i, j)$ i $I_2 = (k, l)$, takie, że $I_1 \not\subseteq I_2$, $I_2 \not\subseteq I_3$, $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$.

Sprawdzenie czy istnieją takie przedziały możem wykonać przeglądając przedziały w odpowiednim porządku. Tworzymy kolejkę zdarzeń:

$$E = \{(l_i, +, (l_i, r_i)) : 1 \leq i \leq n\} \cup \{(r_i, -, (l_i, r_i)) : 1 \leq i \leq n\}$$

Kolejkę porządkujemy wg następującego porządku, $(t_i, s_i, (l_i, r_i)) < (t_j, s_j, (l_j, r_j))$, wtw:

- $t_i < t_j$,
- lub $t_i = t_j$ i $s_i =$ - i $s_j = +$,
- lub $t_i = t_j$ i $s_i = s_j = +$ i $r_i > r_j$,
- lub $t_i = t_j$ i $s_i = s_j =$ - i $l_i > l_j$,

Algorytm 3: Sprawdzenie czy istnieją dwa przecinające się przedziały

```
Utwórz kolejkę zdarzeń E i uporządkuj ją wg zdefiniowanego porządku
S = ∅ (pusty stos przedziałów)
foreach (t_i, s_i, (l_i, r_i)) ∈ E do
    /* Niezmiennik: l ≤ t_i ≤ r dla (l, r) ∈ S                    */
    if s_i = + then
        Niech (l, r) = Top(S)
        if r < r_i then
            /* l < l_i < r i (l_i, r_i) ⊄ Top(S) i (l_i, r_i) ∩ Top(S) ≠ ∅  */
            return TAK
        else
            Push(S, (l_i, r_i))
    else
        /* s_i = − i Top(S) = (l_i, r_i)                          */
        Pop(S)
return NIE
```