

# Algorytmy i Struktury Danych, 8. ćwiczenia, rozwiązania zadań 7. serii (wersja 1.0.0)

2024-11-26

## Zadanie 7.1

Oto ulepszony algorytm BubbleSort sortujący niemalejąco  $n$ -elementową tablicę  $a[1, \dots, n]$ :

```
i := n+1;
repeat
  i := i - 1;
  posortowany := true;
  for j := 2 to i do
    if a[j] < a[j-1] then begin
      a[j-1] := a[j]; { zamiana elementów }
      posortowany := false
    end
  until posortowany;
```

Zaprojektuj efektywny algorytm, który dla tablicy  $a$  zawierającej permutację liczb  $1, 2, \dots, n$  obliczy ile razy algorytm BubbleSort wykona pętlę **repeat**.

**Rozwiązanie:** Zauważmy, że element będzie brał udział w zamianie (jako prawy element) jeśli po jego lewej stronie będzie istniał jakiś większy co do wartości element.

$$\Phi = 1 + \max_i |\{j : j < i \text{ and } A[j] > A[i]\}|$$

Gdyby tablica  $A$  zawierała dowolne wartości to  $\Phi$  można obliczyć w czasie  $O(n \log n)$  wstawiając kolejne elementy  $A$  do drzewa AVL.

Jednak gdy  $A$  to permutacja liczb  $1..n$ , to formuła się upraszcza:

$$\Phi = 1 + \max_{i \in 1, \dots, n} (i - A[i])$$



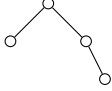
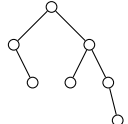
(krytyczna wartość  $i$  ma na prawo tylko elementy większe – inaczej nie była by optymalna).

## Zadanie 7.2

- a) Do początkowo pustego AVL-drzewa wstawiamy kolejno klucze  $1, 2, \dots, n$ , gdzie  $n$  jest dodatnią liczbą całkowitą. Podaj klucze, które kiedykolwiek znajdują się w korzeniach kolejno powstających drzew.
- b) Jaka jest minimalna, a jaka maksymalna liczba węzłów (wewnętrznych) w AVL-drzewie o wysokości  $h$ ?
- c) Załóżmy, że kluczami w AVL drzewie są kolejne liczby naturalne  $1, 2, \dots$ . Jaki najmniejszy, a jaki największy klucz może znaleźć się w korzeniu AVL-drzewa o wysokości  $h$ ?

**Rozwiązanie:**

- a)  $2^i$  dla  $i = 0, \dots, \lfloor \log n \rfloor$ . Dowód przez indukcję na prawym poddrzewie.
- b)  $T_{min}(h)$  drzewo AVL o wysokości  $h$  i minimalnej liczbie węzłów:

$h$	$T_{min}(h)$	FIB( $h + 2$ )	Drzewo
0	0	1	
1	1	2	
2	2	3	
3	4	5	
4	7	8	

Wzór na  $T_{min}(h)$ :

$$T_{min}(h) = T_{min}(h - 1) + T_{min}(h - 2) + 1$$

$T_{min}$  to ciąg <https://oeis.org/A000071>, i można go wyrazić wzorem:

$$T_{min}(h) = \text{FIB}(h + 2) - 1$$

$T_{max}(h)$  drzewo AVL o wysokości  $h$  i maksymalnej liczbie węzłów, czyli:

$$T_{max}(h) = 2^h - 1$$

- c) w korzeniu mogą być wartości z zakresu  $[T_{min}(h - 2) + 1, T_{max}(h - 1) + 1]$ .

### Zadanie 7.3

Zaproponuj implementacje operacji Join i Split dla drzew typu “splay”.

**Rozwiązanie:**

**Split(x)::** wykonaj operację Splay(x) i usuń korzeń, otrzymując lewe i prawe poddrzewo,

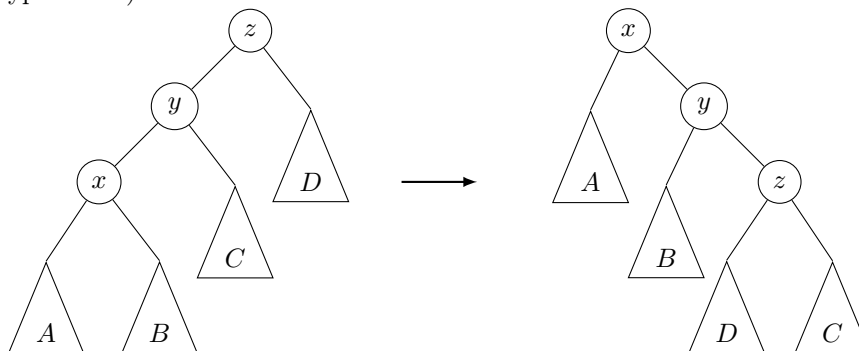
**Join( $T_x, T_y$ )::** wykonaj operację Splay(max( $T_x$ )) a następnie podłącz  $T_y$  jako prawe poddrzewo max( $T_x$ ).

### Zadanie 7.4

Dokonaj analizy kosztu zamortyzowanego operacji LocalSplay w przypadku 2a (patrz wykład).

**Rozwiązanie:**

Przypadek 2a)



$$\Delta\Phi = m'(z) + m'(y) + m'(x) - m(x) - m(y) - m(z)$$

Ponieważ  $m'(x) = m(z)$ :

$$\Delta\Phi = m'(z) + m'(y) - m(x) - m(y)$$

Analogicznie do rozwiązania wykładu przypadku 2b. Definiujemy tak samo  $a$  i  $b$  ( $a = |A| + |B| + 1$  i  $b = |C| + |D| + 1$ ), tylko używamy  $\log a = m_x$ ,  $\log b = m'_z$  i  $\log(a + b + 1) = m_z = m'_x$ .

### Zadanie 7.5

Zaproponuj implementacje operacji Join i Split dla 2-3-4 drzew.

**Rozwiązanie:** Join i Split na 2-3-4 drzewach: <http://courses.csail.mit.edu/6.046/spring04/handouts/ps5-sol.pdf>

Ogólnie o 2-3-4 drzewach: <https://www.cs.purdue.edu/homes/ayg/CS251/slides/chap13b.pdf>

## Zadanie 7.6

Zaprojektuj algorytm, który sprawdza, czy wierzchołki danego drzewa binarnego można pokolorować w taki sposób, żeby otrzymać drzewo czerwono-czarne i jeśli odpowiedź jest tak, to znajduje takie pokolorowanie

### Rozwiązanie:

Zdefiniujmy następujące wartości:

$h(v, B)$  oznacza zbiór możliwych czarnych wysokości drzewa czerwono-czarnego o korzeniu  $v$  przy założeniu, że  $v$  jest czarny,

$h(v, R)$  oznacza zbiór możliwych czarnych wysokości drzewa czerwono-czarnego o korzeniu  $v$  przy założeniu, że  $v$  jest czerwony.

Z własności drzew czerwono-czarnych wiemy, że  $|h(v, R/B)| = O(\log n)$ .

Wzory rekurencyjne na obliczanie  $h$ :

- $h(NULL, B) = \{1\}$ ,  $h(NULL, R) = \emptyset$ ,
- $h(v, R) = h(left(v), B) \cap h(right(v), B)$
- dla  $h(v, B)$ :
  - $L = \{x + 1 : x \in h(left(v), R) \cup h(left(v), B)\}$
  - $R = \{x + 1 : x \in h(right(v), R) \cup h(right(v), B)\}$
  - $h(v, B) = L \cap R$ .

Co daje rozwiązanie  $O(n \log n)$ . Jeśli jednak zauważmy, że  $h(v, B)$  i  $h(v, R)$  stanowią spójny przedział lub zbiór pusty, to możemy obliczyć wszystkie wartości w  $O(n)$ .