Algorytmika, 1. ćwiczenia

2009-02-19

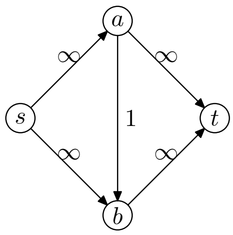
Definicje

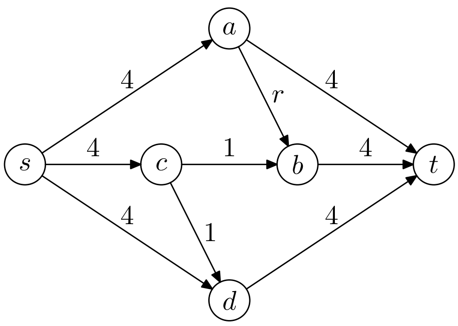
Niech $G = (V, E)$:

- *skojarzenie* — zbiór krawędzi $M \subseteq E$, taki, że jeśli $e_1 = (x_1, y_1)$, $e_2 = (x_2, y_2)$, $e_1, e_2 \in M$, $e_1 \neq e_2$, $\{x_1, y_1\} \cap \{x_2, y_2\} = \emptyset$.
- *doskonałe skojarzenie* — skojarzenie M w którym każdy wierzchołek jest skojarzony,
- *pokrycie wierzchołkowe* — minimalny pozbiór wierzchołków $C \subseteq V$, taki, że dla każdej krawędzi $(x, y) \in E$, $x \in C$ lub $y \in C$.

1 Ford Fulkerson, złośliwy przykład

Trochę oszukiwany przykład:





Rysunek 1: Przykład z U. Zwick, TCS, 1995

Trochę lepszy przykład (rysunek 1)

- $r = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, $\quad r < 1$, $\quad 1 - r = r^2$, $\quad r^i - r^{i+1} = r^{i+2}$,
- $p_0 = (s, c, b, t)$,
- $p_1 = (s, a, b, c, d, t)$,
- $p_2 = (s, c, b, a, t)$,
- $p_3 = (s, d, c, b, t)$,
- wybieramy ścieżki: $p_0(p_1, p_2, p_1, p_3)^*$

ścieżka	przepływ	$c(a,b)$	$c(c,b)$	$c(c,d)$
		r	1	1
p_0	1	r	0	1
p_1	r	0	r	$1 - r = r^2$
p_2	r	r	0	r^2
p_1	r^2	r^3	r^2	0
p_3	r^2	r^3	0	r^2

Problem 26–1

Kratownica $n \times n$, dany zbiór wierzchołków M, czy istnieje $|M|$ wierzchołkowo rozłącznych ścieżek z M do brzegów kratownicy?

- sprowadzić problem do maksymalnego przepływu z ograniczeniem na wierzchołki (dodać przepustowość wierzchołków),
- sprowadzić poprzedni problem do tradycyjnych przepływów (każdy wierzchołek v zamieniamy przez parę v' i v'' połączoną krawędzią o przepustowości wierzchołka v, krawędzie wchodzące do v wchodzą do v', krawędzie wychodzące z v wychodzą z v'').

2 Problem 26–2

Dany graf G, należy go pokryć jego wierzchołki minimalną liczbą rozłącznych wierzchołkowo ścieżek.

- dla grafów acyklicznych $G = (\{1, \ldots, n\}, E)$, budujemy graf G':
  - $V' = \{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, \ldots, y_n\}$,
  - $E' = \{(x_0, x_i),\ (y_i, y_0) : i \in V\} \cup \{(x_i, y_j) : (i, j) \in E\}$,
  - wszystkie krawędzie mają pojemność 1,
  - odpowiedzią jest $n - f$ gdzie f to wartość znalezionego przepływu (wszystkie wierzchołki x_i, przez które nie płynie przepływ, odpowiadają końcom ścieżek),
- jeśli graf nie jest acykliczny, to poprzednie rozumowanie spowoduje pokrycie grafu ścieżkami i cyklami.

26.2–9, Spójność krawędziowa

Ile minimalnie usunąć krawędzi, żeby rozspójnić graf?

Niech $f_{u,v}$ maksymalny przepływ z s do t w grafie $G_{u,v} = (V + \{s,t\}, E + \{(s,u),(v,t)\})$, (wszystkie krawędzie z E mają przepustowość 1, dwie dodane ∞). Można pokazać, że odpowiedzią dla zadania jest wartość:

$$min_{u \in V,\ u \neq v} |f_{u,v}|$$

Najliczniejsze skojarzenia przez przepływy

Dodajemy do grafu dwudzielnego $G = (A \cup B, E)$ dwa nowe wierzchołki s i t, które łączymy z wierzchołki, które następnie łączymy odpowiednio z A i B. Wszystkie krawędzie mają przepustowość 1. Nasycone krawędzie (poza sąsiadującymi z s i t) należą do skojarzenia.

Twierdzenia

Twierdzenie 1 *(Hall, 1935) Niech G graf dwudzielny (o zbiorach wierzchołków X i Y). Pełne skojarzenie wierzchołków X istnieje wtw, $|S| \leq |N(S)|$ dla dowolnego $S \subseteq X$.*

Jeśli graf ma skojarzenie doskonałe, to warunek jest spełniony.

Niech dla każdego $S \subseteq X$, $|S| \leq |N(S)|$, oraz istnieje $x_0 \in X$, który nie jest skojarzony. Niech Z bedzie zbiorem wierzchołków osiągalnych z x_0 przez ścieżki alternujące. Ponieważ M jest najliczniejszym skojarzeniem, nie wśród nich ścieżek rozszerzających. Niech $S = Z \cap A$, $T = Z \cap B$. Każdy wierzchołek w T jest skojarzony z pewnym wierzchołkiem z $S - \{x_0\}$, oraz każdy wierzchołek z $S - \{x_0\}$ jest skojarzony z pewnym wierzchołkiem z T. Więc $|T| = |S| - 1$, ale $T = N(S)$, stąd $|N(S)| = |S| - 1$ — sprzeczność.

Twierdzenie 2 *(Frobenius, 1917) Dla $k > 0$, każdy k–regularny graf dwudzielny ma doskonałe skojarzenie*

Weźmy dowolny zbiór S ($S \subseteq X$). Ponieważ G jest k–regularny, to liczba krawędzi wychodzących z S jest równa $out(S) = k|S|$, natomiast z $N(S)$ wychodzi $out(N(S)) = k|N(S)|$. Dla dowolnego S zachodzi również $out(S) \leq out(N(S))$. W takim razie $k|S| \leq k|N(S)|$, czyli $|S| \leq |N(S)|$.

Twierdzenie 3 *(Konig, Egervary, 1931) Jeśli G graf dwudzielny, C minimalne pokrycie wierzchołkowe G, M maksymalne skojarzenie G, to $|C| = |M|$.*

(przez przepływy) Dodajemy do grafu s i t (s połączone z wierzchołkami X, t połączone z wierzchołkami Y), wszystkie krawędzie z/do s, t, mają przepustowość 1, oryginalne krawędzie grafowe mają przepustowość ∞. $|f| = |M|$, a jako minimalne pokrycie bierzemy zbiór wierzchołków sąsiadujący z krawędziami cięcia. qued

Niech M maksymalne skojarzenie, w takim razie $|C| \geq |M|$. Należy jeszcze udowodnić, że $|M| \geq |C|$.

Niech C minimalne pokrycie wierzchołkowe, można pokazać, że $C \cap X$ można doskonale skojarzyć z $Y - C$ ($C \cap X$ i $Y - C$ muszą spełniać twierdzenie Hall, inaczej można pokazać, mniejsze minimalne pokrycie), oraz $C \cap Y$ można doskonale skojarzyć z $X - C$, co w sumie daje skojarzenie o mocy $|C|$.