Algorytmy i Struktury Danych, 10. ćwiczenia

2008-12-15

1 Plan zajęć

- Silnie spójne składowe
- Znajdowanie podgrafu grafu dwuspójnego o co najwyżej $2n-2$ krawędziach
- Dodanie do grafu dwuspójnego mnimalnej liczby krawędzi w celu jego udwospójnienia,
- Sortowanie topologiczne
- Rozpoznawanie grafów zewnętrznie planarnych,

2 Silne spójne składowe

Wierzchołki x, y należą do tej samej silnej spójnej składowej, jeśli istnieją ścieżki z x do y oraz z y do x.

SCC(G)

- uruchom algorytm DFS, oblicz czasy $f[v]$ dla każdego wierzchołka,
- wyznacz graf G^T (transpozycja grafu G)
- przeglądaj alg. DFS, wierzchołki G^T w kolejności malejących czasów $f[v]$,
- zwróć każde drzewo DFS jako osobną silną spójną składową.

Lemat 1 *Silne spójne składowe są identyczne w grafach G i G^T.*

Lemat 2 *Niech C i C' będą różnymi silnie spójnymi składowymi grafu skierowanego $G = (V, E)$ i niech $u, v \in C$, natomiast $u', v' \in C'$. Załóżmy, że istnieje ścieżka $u \to u'$ w G. Wówczas w G nie może istnieć ścieżka z $v' \to v$.*

Def. $d(U) = min_{u \in U} d[u]$, $f(U) = max_{u \in U} f[u]$.

Lemat 3 *Niech C i C' będą różnymi silnie spójnymi składowymi w skierowanym grafie $G = (V, E)$. Załóżmy, że istnieje krawędź $(u, v) \in E$, taka, że $u \in C$ i $v \in C'$. Wówczas $f(C) > f(C')$.*

Lemat 4 *Niech C i C' będą różnymi silnie spójnymi składowymi w skierowanym grafie $G = (V, E)$. Załóżmy, że istnieje krawedź $(u, v) \in E^T$, taka, że $u \in C$ i $v \in C'$. Wówczas $f(C) < f(C')$.*

Twierdzenie 1 *Algorytm SCC poprawieni oblicza silnie spójne składowe w skierowanym grafie G.*

3 Sortowanie topologiczne

Dany jest acykliczny graf skierowany, chcemy znaleźć takie ponumerowanie wierzchołków, żeby dla każdej krawędzi $(u, v) \in E$, ponumerowanie spełniało $num[u] < num[v]$.
(Cormen, 22.4, strony 559–568).

Algorytm 1

- wykonaj DFS w celu obliczenia numerów $f[v]$ (czas wyjścia z wierzchołka v) dla wierzchołków,
- posortuj wierzchołki wg. malejących wartości $f[v]$,
- nadaj kolejne numery zgodnie z malejącymi wartościami $f[v]$.

Algorytm 2

Algorytm 1: Topological-Sort(G)

Oblicz stopnie wejściowe wierzchołków $indeg[v]$;
Dodaj na listę Q wierzchołki o wartościach $indeg[v] = 0$;
$i = 0$;
while $Q \neq \emptyset$ **do**
    v=Q.Dequeue ;
    $num[v] = i{+}{+}$;
    for $u \in adj(v)$ **do**
        $indeg[u]-$;
        if $indeg[u] = 0$ **then** Q.Enqueue(u)

4 Rozpoznawanie grafów zewnętrznie planarnych

Graf jest zewnętrznie planarny jeśli:

- jest planarny,
- można go tak narysować, żeby wszystkie jego wierzchołki leżały na jednej ścianie.

Opis algorytmu można znaleźć w:

- Manfred Wiegers: *Recognizing Outerplanar Graphs in Linear Time.* WG 1986: pp. 165-176.

Lemat 5 *Jeśli graf G jest zewnętrznie planarny to zawiera wierzchołek v, taki, że $deg(v) \leq 2$.*

Algorytm 2: Outerplanar(V, E)

---

if $|V| \leq 3$ **then**
  zaznacz wszystkie krawędzie jako zewnętrzne, ;
  return true;
else if $\exists_v deg(v) = 1$ **then**
  Niech w sąsiad wierzchołka v ;
  Zaznacz krawędź (v, w) jako zewnętrzną. **return** Outerplanar$(V - \{v\},\ E - \{(v, w)\})$
else if $\exists_v deg(v) = 2$ **then**
  Niech w_1, w_2 sąsiedzi wierzchołka v ;
  if not *Outerplanar*$(V - \{v\},\ E - \{(v, w_1), (v, w_2)\} + \{(w_1, w_2)\})$ **then**
    return false;
  if (w_1, w_2) *krawędź wewnętrzna* **then**
    return false;
  Zaznacz krawędzie $(v, w_1), (v, w_2)$ jako zewnętrzne ;
  Zaznacz krawędzie (w_1, w_2) jako wewnętrzną ;
  return true;
else
  return false;
