**Egzamin ze wstępu do teorii mnogości**
5 lutego 2007

1. Niech $\phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbf{P}(\mathbb{R})$ będzie określona następująco: $\phi(f) = \vec{f}^{-1}(\mathbb{IQ})$, gdzie $\mathbb{IQ} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Zbadać, czy funkcja $\phi$ jest różnowartościowa i czy jest na $\mathbf{P}(\mathbb{R})$.

2. Jaka jest moc zbioru $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid \overline{\overline{\phi(f)}} = \aleph_0\}$, jeśli $\phi$ jest funkcją z zadania 1?

3. Niech $D \subseteq \mathbb{R}$. Zbiór $V \subseteq \mathbb{R}$ jest $D$-*łatwy*, gdy $(x+y)^3 - 2xy \in D$ dla wszystkich $x, y \in V$, takich że $x \neq y$. Zbiór $V \subseteq \mathbb{R}$ jest $D$-*trudny*, gdy:
$$\forall x \in \mathbb{R}(x \in V \vee \exists y \in V((x+y)^3 - 2xy \notin D)).$$
Dla jakich $D$ istnieje zbiór $V$, jednocześnie $D$-łatwy i $D$-trudny?

4. Niech $\langle A, \leq \rangle$ będzie częściowym porządkiem i niech $f : A \to A$. Załóżmy, że dla każdego łańcucha $L$ w $\langle A, \leq \rangle$ istnieją kresy dolne zbiorów $L$ i $\vec{f}(L)$, a jeśli $L \neq \emptyset$, to na dodatek $f(\inf L) = \inf(\vec{f}(L))$. Udowodnić, że $f$ ma największy punkt stały.

   **Uwaga:** Założenia o kresach dolnych dotyczą *tylko łańcuchów*!

## Rozwiązania

**Zadanie 1:** Funkcja $\phi$ nie jest różnowartościowa. Jeśli na przykład $f(x) = x+1$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $\phi(\mathrm{id}_\mathbb{R}) = \phi(\mathrm{f}) = \mathbb{IQ}$. Natomiast $\phi : \mathbb{R}^\mathbb{R} \xrightarrow{\text{na}} \mathbf{P}(\mathbb{R})$, bo dla dowolnego $B \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi $B = \phi(f)$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} \pi, & \text{jeśli } x \in B, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

**Zadanie 2:** Zbiór $F$ jest mocy $2^\mathfrak{C}$. Nierówność $\overline{\overline{F}} \leq 2^\mathfrak{C}$ wynika stąd, że $F \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{R}$, a ten ostatni zbiór ma moc $\mathfrak{C}^\mathfrak{C} = 2^\mathfrak{C}$. Aby wykazać, że $\overline{\overline{F}} \geq 2^\mathfrak{C}$, zauważmy najpierw, że zbiór $\mathbb{Q}^{\mathbb{R}-\mathbb{N}}$ jest także mocy $2^\mathfrak{C}$, bo $\overline{\overline{\mathbb{R}-\mathbb{N}}} = \mathfrak{C}$. Funkcja $\xi : \mathbb{Q}^{\mathbb{R}-\mathbb{N}} \xrightarrow{1-1} F$ może zaś być określona warunkiem

$$\xi(f)(x) = \begin{cases} \pi, & \text{jeśli } x \in \mathbb{N}, \\ f(x), & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

**Zadanie 3:** Zbiór jest jednocześnie $D$-łatwy i $D$-trudny, wtedy i tylko wtedy, gdy jest maksymalnym zbiorem $D$-łatwym (tj. elementem maksymalnym rodziny wszystkich zbiorów $D$-łatwych, uporządkowanej przez inkluzję). Rodzina ta spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna, jeśli bowiem $L$ jest łańcuchem zbiorów $D$-łatwych, to $\bigcup L$ też jest zbiorem $D$-łatwym, (a jako taki, stanowi ograniczenie górne łańcucha). Istotnie, jeśli $x, y \in \bigcup L$, to istnieją takie $V_1, V_2 \in L$, że $x \in V_1$ i $y \in V_2$. Ponieważ $L$ jest łańcuchem, więc $V_{2-i} \subseteq V_i$ dla $i = 1$ lub $i = 2$. Wtedy $x, y \in V_i$, skąd wynika pożądana własność $(x+y)^3 - 2xy \in D$.

Z powyższego wynika, że dla każdego $D$, do rodziny wszystkich zbiorów $D$-łatwych stosuje się lemat Kuratowskiego-Zorna, a więc maksymalny zbiór $D$-łatwy istnieje zawsze.

**Zadanie 4:** Ponieważ zbiór pusty jest łańcuchem, więc istnieje $\inf\emptyset$, czyli największy element zbioru $A$. Oznaczmy go przez $\top$. Dalej zauważmy, że funkcja $f$ jest monotoniczna. Jeśli bowiem $a \leq b$ to zbiór $\{a, b\}$ tworzy łańcuch o kresie dolnym $a$. Zatem $f(a)$ jest kresem dolnym dla $\{f(a), f(b)\}$, czyli $f(a) \leq f(b)$.

Niech $a_k = f^k(\top)$. Z monotoniczności funkcji $f$ wynika, że ciąg $a_k$ jest zstępujący: $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \ldots$ Zbiór $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ jest więc łańcuchem i ma kres dolny $a_\omega$. Z założenia o $f$ mamy teraz $f(a_\omega) = \inf\{f^{k+1}(\top) \mid k \in \mathbb{N}\} = \inf\{f^k(a_k) \mid k \in \mathbb{N}\} = a_\omega$. A więc $a_\omega$ jest punktem stałym $f$. Jeśli $b$ jest innym punktem stałym, to oczywiście $b \leq \top$. Przez indukcję łatwo udowodnić, że $b = f^k(b) \leq f^k(\top) = a_k$ skąd $b$ jest ograniczeniem dolnym zbioru $\{a_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. A zatem $b \leq a_\omega$, bo $a_\omega$ jest kresem dolnym tego zbioru.