Klasówka ze wstępu do teorii mnogości
7 grudnia 2006

1. Niech $Z \subseteq N$. Określamy relację $R_Z \subseteq \mathbf{P}(\mathbb{N}) \times \mathbf{P}(\mathbb{N})$ następująco:

$$\langle X, Y\rangle \in R_Z \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } X \cup Z = Y \cup Z.$$

Niech $\mathcal{R}$ będzie zbiorem wszystkich relacji równoważności w $\mathbf{P}(\mathbb{N})$. Funkcja $f : \mathbf{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{R}$ jest określona warunkiem $f(Z) = R_Z$.

   (a) Czy funkcja f jest różnowartościowa?

   (b) Czy funkcja f jest na $\mathcal{R}$?

2. Podać przykład takiej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ i zbioru $X \subseteq \mathbb{N}$, aby funkcja $g : \mathbb{N} \to \mathbf{P}(\mathbb{N})$, określona wzorem

$$g(i) = \overrightarrow{f}^{-i}(X),$$

gdzie $\overrightarrow{f}^{-i}(X)$ oznacza przeciwobraz X przy przekształceniu f^i, była różnowartościowa.

Rozwiązania

1a. Tak. Jeśli $Z \neq Y$, na przykład $Z \not\subseteq Y$, to istnieje element $z \in Z$, który nie należy do Y. Wtedy $\{z\} R_Z \emptyset$, ale $\langle \{z\}, \emptyset\rangle \notin R_Y$. Zatem $R_Z \neq R_Y$.

1b. Nie. Zauważmy bowiem, że klasa abstrakcji $[Z]_{R_Z}$ to zawsze zbiór $\mathbf{P}(Z)$. Mamy bowiem $\langle X, Z\rangle \in R_Z$ wtedy i tylko wtedy, gdy $X \cup Z = Z$, czyli gdy $X \subseteq Z$. Rozpatrzmy teraz podział zbioru $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ na dwie składowe: jedna z nich to zbiór $\{\emptyset, \{0\}, \{1\}\}$ a do drugiej należą wszystkie pozostałe podzbiory $\mathbb{N}$. Relacja równoważności wyznaczona przez ten podział nie jest postaci R_Z (a więc nie jest wartością funkcji f), bo żaden ze zbiorów naszego podziału nie jest postaci $\mathbf{P}(Z)$. Pierwszy dlatego, że ma 3 elementy, drugi dlatego, że nie należy do niego zbiór pusty.

2. Niech $f(0) = 0$ oraz $f(n) = n - 1$, gdy $n > 0$. Jeśli teraz $X = \{0\}$, to mamy $g(i) = f^{-i}(\{0\}) = \{n \mid f^i(n) = 0\} = \{0, \ldots, i\}$. A zatem $g(i) \neq g(j)$, dla $i \neq j$.