Egzamin ze wstępu do teorii mnogości — II termin
8 marca 2007

1. Niech $\mathbb{IQ} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ i niech $\phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \to \mathbf{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$ będzie taka, że $\phi(f) = \vec{f}(\mathbb{IQ})$. Zbadać, czy funkcja ϕ jest różnowartościowa i czy jest na $\mathbf{P}(\mathbb{R}) - \{\emptyset\}$.

2. Dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$ określamy funkcje $f_k : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ jak niżej:

$$f_k(a)(n) = \begin{cases} a(n) + a(n+1) - a(n)a(n+1), & \text{dla } n = k, \\ a(n)a(n+1), & \text{dla } n = k+1, \\ a(n), & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$

   Każdą z takich funkcji nazywamy *wesołą transformacją*. Wyznacz moc zbioru G wszystkich tych ciągów należących do $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, które za pomocą skończonej liczby wesołych transformacji można przekształcić w jakiś element zbioru

$$B = \{a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \exists n \in \mathbb{N}(\forall i < n(a(i) = 1) \wedge \forall i \geq n(a(i) = 0))\}.$$

3. Zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ nazwiemy *wzorcowym*, jeżeli każda liczba rzeczywista jest współmierna[1] z pewną liczbą ze zbioru A, ale żadne dwie liczby ze zbioru A nie są współmierne. Czy istnieją zbiory wzorcowe?

4. Niech $\langle Er, \leq \rangle$ będzie zbiorem liniowo uporządkowanym i niech $Ku \subseteq Er$ będzie podzbiorem zbioru Er o mocy $\aleph_0$. Załóżmy, że

   - Każdy podzbiór zbioru Er ograniczony z góry ma kres górny.
   - Jeśli $x, y \in Er$ i $x < y$ to istnieje takie $ku \in Ku$, ze $x < ku < y$.
   - W zbiorze Er nie ma elementu pierwszego ani ostatniego.

   Udowodnić, że zbiór $\langle Er, \leq \rangle$ jest mocy continuum.

[1] Liczby rzeczywiste x i y są *współmierne*, gdy $mx + ny = 0$ dla pewnych całkowitych m i n.

Rozwiązania

Zadanie 1: Funkcja ϕ nie jest różnowartościowa. Jeśli na przykład $f(x) = x + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$, to $\phi(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}) = \phi(\mathrm{f}) = \mathbb{IQ}$. Aby wykazać, że $\phi : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \xrightarrow{\text{na}} \mathbf{P}(\mathbb{R})$, zauważmy, że dla każdego niepustego zbioru $B \subseteq \mathbb{R}$ zachodzi $\overline{\overline{B}} \leq \mathfrak{C}$. Istnieje więc funkcja $f_B : \mathbb{IQ} \xrightarrow{\text{na}} B$. Wtedy $\phi(f) = B$, gdzie

$$f(x) = \begin{cases} f_B(x), & \text{jeśli } x \in \mathbb{IQ}, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Zadanie 2: Zbiór G jest mocy $\aleph_0$. Oczywiście $\overline{\overline{B}} = \aleph_0$, więc $\overline{\overline{G}} \geq \aleph_0$, bo $B \subseteq G$. Pokażemy, że $\overline{\overline{G}} \leq \aleph_0$. Niech H będzie zbiorem tych ciągów z $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, w których występuje tylko skończenie wiele jedynek. Jako przeliczalna suma przeliczalnych zbiorów

$$H_k = \{a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geq k.\, a(n) = 0\},$$

zbiór H sam jest zbiorem przeliczalnym. Ponadto $G \subseteq H$. Istotnie, każda wesoła transformacja zmienia ciąg w co najwyżej dwóch miejscach, aby więc w skończonej liczbie kroków otrzymać element zbioru B, trzeba zacząć od ciągu, który od pewnego miejsca ma same zera.

Zadanie 3: Zbiór wzorcowy to maksymalny element rodziny $\mathcal{R}$ wszystkich zbiorów o elementach parami niewspółmiernych, uporządkowanej przez inkluzję. Łańcuch takich zbiorów jest ograniczony z góry w $\mathcal{R}$ przez swoją sumę — jest ona bowiem elementem $\mathcal{R}$. Istotnie, jeśli liczby x, y należą do sumy takiego łańcucha, to każda z nich należy do pewnego składnika sumy, powiedzmy, że $x \in S$ i $y \in T$. Ponieważ jednak T i S są elementami łańcucha, mamy $S \subseteq T$ lub $T \subseteq S$, a więc obie liczby x i y należą do tego samego składnika i muszą być niewspółmierne.

Z powyższego wynika, że rodzina $\mathcal{R}$ spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna, a więc ma element maksymalny — zbiór wzorcowy.

Zadanie 4: Zbiór Ku jest mocy $\aleph_0$, jest gęsty i nie ma elementu pierwszego ani ostatniego, a więc jest izomorficzny ze zbiorem liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ (uporządkowanym tak jak zwykle). Niech $f : Ku \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{Q}$ będzie odpowiednim izomorfizmem. Dla $er \in Er$ przez $er{\downarrow}$ oznaczymy zbiór $\{ku \in Ku \mid ku < er\}$.

Rozpatrzmy przekształcenie $F : Er \to \mathbb{R}$, dane wzorem $F(er) = \sup \vec{f}(er{\downarrow})$. Przekształcenie to jest różnowartościowe, bo jeśli $x < y$ to $x < ku_1 < ku_2 < y$ dla pewnych $ku_1, ku_2 \in Ku$. Wtedy dla dowolnego $d \in x{\downarrow}$ mamy $f(d) < f(ku_1)$, skąd $F(x) \leq f(ku_1) < f(ku_2) \leq F(y)$.

Analogicznie, jeśli $G(r) = \sup \vec{f}^{-1}(\{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\})$ dla $r \in \mathbb{R}$, to $G : \mathbb{R} \xrightarrow{1-1} Er$. Dowód jest w zasadzie taki sam. A więc pokazaliśmy, że $\overline{\overline{Er}} \leq \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ oraz $\overline{\overline{\mathbb{R}}} \leq \overline{\overline{Er}}$. Zatem $\overline{\overline{Er}} = \mathfrak{C}$.