Egzamin ze wstępu do teorii mnogości
II termin — 9 marca 2006

1. Powiemy, że zbiór funkcji $F \subseteq 2^X$ *rozróżnia elementy zbioru* $A \subseteq X$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych różnych $x, y \in A$ istnieje taka funkcja $f \in F$, że $f(x) \neq f(y)$.
   (a) Czy istnieje minimalny (ze względu na inkluzję) zbiór $F \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ rozróżniający elementy zbioru $\mathbb{N}$?
   (b) Czy istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór $F \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ nie rozróżniający elementów zbioru $\mathbb{N}$?
   (c) Jakiej mocy jest rodzina wszystkich tych podzbiorów zbioru $2^{\mathbb{N}}$, które rozróżniają elementy zbioru $\mathbb{N}$?
   (d) Czy dla każdego $F \subseteq 2^X$ istnieje maksymalny (ze względu na inkluzję) zbiór $A \subseteq X$, którego elementy rozróżnia zbiór F?

2. Niech $\mathbb{Q}^+ = \{q \in \mathbb{Q} \mid q > 0\}$ i niech $f : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{Q}$ i $g : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{Q}^+$. Definiujemy funkcję $h : \mathbb{Q} \xrightarrow{1-1} \mathbb{Q}^+$, przyjmując $h(f(n)) = g(m)$, gdzie
$$m = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \forall i < n\, [h(f(i)) \neq g(k) \wedge [f(i) \leq f(n) \leftrightarrow h(f(i)) \leq g(k)]]\}.$$
Czy funkcja h jest dobrze określona? Czy jest „na $\mathbb{Q}^+$"?

3. Nie powołując się na twierdzenie Cantora, proszę udowodnić następujący wariant tego twierdzenia:
Dla żadnego zbioru A nie istnieje surjekcja z A na 2^A.

Rozwiązania[1]

Zadanie 1a: Niech dla każdego $n \in \mathbb{N}$ funkcja $f_n : \mathbb{N} \to 2$ będzie funkcją charakterystyczną zbioru $\{n\}$, tzn. niech $f_n(k) = 1$, gdy $k = n$, a $f_n(k) = 0$, gdy $k \neq n$. Niech $F = \{f_n \,|\, n \in \mathbb{N}, n > 0\}$. Wtedy F rozróżnia elementy zbioru $\mathbb{N}$. Weźmy bowiem dowolne dwie różne liczby naturalne i oznaczmy większą przez x, a mniejszą przez y (zatem $x > 0$). Wtedy $f_x(x) = 1$, zaś $f_x(y) = 0$, a zarazem $f_x \in F$. Zbiór F jest także minimalnym zbiorem rozróżniającym $\mathbb{N}$. Weźmy bowiem dowolny jego podzbiór F_0 rozróżniający $\mathbb{N}$ oraz dowolne naturalne $n > 0$. Wiemy, że istnieje takie naturalne $x > 0$, że $f_x \in F_0$ oraz $f_x(0) \neq f_x(n)$. Ponieważ $f_x(0) = 0$, więc $f_x(n) = 1$, a zatem $x = n$. Dowodzi to, że dla każdego naturalnego $n > 0$ mamy $f_n \in F_0$. A zatem $F_0 = F$.

Zadanie 1b: Niech $F = \{f : \mathbb{N} \to 2 \,|\, f(0) = f(1)\}$. Zbiór F nie rozróżnia zbioru $\mathbb{N}$, ponieważ dla każdego $f \in F$ zachodzi $f(0) = f(1)$. Niech F' będzie dowolnym nadzbiorem F nie rozróżniającym $\mathbb{N}$ i niech g będzie dowolnym jego elementem. Istnieją różne liczby naturalne x, y takie, że dla każdego $f \in F'$ zachodzi $f(x) = f(y)$, gdyż w przeciwnym razie F' rozróżniałby $\mathbb{N}$. Jeżeli $x > 1$, to $f_x \in F$ oraz $f_x(x) = 1$ jest różne od $f_x(y) = 0$. Podobnie jeśli $y > 1$. A zatem $x = 1$ i $y = 0$ lub $x = 0$ i $y = 1$. Skoro $g \in F'$, to $g(x) = g(y)$, a więc $g(0) = g(1)$. Zatem $g \in F$. Dowodzi to, że $F' = F$.

Zadanie 1c: Zbiór F z części 1a rozróżnia elementy zbioru $\mathbb{N}$ i jest mocy $\aleph_0$. Ponieważ dla dowolnej mocy nieskończonej $\mathfrak{m}$ zachodzi $\mathfrak{m} + \aleph_0 = \mathfrak{m}$, więc moc zbioru $2^{\mathbb{N}} - F$ jest równa continuum. Ponieważ każdy zbiór postaci $F \cup G$, gdzie $G \subseteq 2^{\mathbb{N}} - F$, rozróżnia elementy zbioru $\mathbb{N}$, więc rodzina tych podzbiorów zbioru $2^{\mathbb{N}}$, które rozróżniają całe $\mathbb{N}$ jest mocy co najmniej $2^{\mathfrak{c}}$. Ta rodzina jest więc dokładnie mocy $2^{\mathfrak{c}}$, bo jest zawarta w zbiorze $P(2^{\mathbb{N}})$, który też jest mocy $2^{\mathfrak{c}}$.

Zadanie 1d: Rozważamy uporządkowany przez inkluzję zbiór Z wszystkich tych $A \subseteq X$, których elementy rozróżnia zbiór F. Zauważmy, że nasz zbiór spełnia założenia lematu Kuratowskiego-Zorna, tj. suma dowolnego łańcucha zbiorów należących do Z sama należy też do Z. (Istotnie, jeśli x, y są elementami sumy łańcucha L to $x \in A$, $y \in B$, dla pewnych $A, B \in L$. Jeden ze zbiorów A, B zawiera drugi, a zatem oba elementy x, y do niego należą, istnieje więc pożądana funkcja.) Istnienie elementu maksymalnego rodziny Z wynika więc z lematu Kuratowskiego-Zorna.

Zadanie 2: Udowodnimy przez indukcję, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, określone są wszystkie wartości $h(f(i))$ dla $i \leq n$, oraz że dla $i, j \leq n$ zachodzi warunek

[1] Dziękuję dr. Piotrowi Hoffmanowi za przygotowanie części rozwiązań

$f(i) \leq f(j) \leftrightarrow h(f(i)) \leq h(f(j))$. Wynika stąd, że $h(f(i))$ jest dobrze określone dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$. Dla $n = 0$ teza jest oczywista, załóżmy więc, że $n > 0$, i że warunek zachodzi dla $i, j \leq n - 1$. Ustawmy wartości $f(i)$ dla $i \leq n-1$ w ciąg rosnący $a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1}$. Zauważmy, że wartości $h(f(i))$ tworzą wtedy też ciąg rosnący $h(a_0) < h(a_1) < \cdots < h(a_{n-1})$. Liczba $f(n)$ należy do jednego z przedziałów $(-\infty, a_0), (a_0, a_1), \ldots, (a_{n-2}, a_{n-1}), (a_{n-1}, \infty)$, a wartość $h(f(n))$ jest określona, bo każdy z odpowiadających im w $\mathbb{Q}^+$ przedziałów $(0, b_0), (b_0, b_1), \ldots, (b_{n-2}, b_{n-1}), (b_{n-1}, \infty)$ jest niepusty. A więc funkcja jest dobrze określona.

Dla dowolnego n, liczby $b \in \mathbb{Q}^+$ spełniające warunek

$$\forall i < n \, [f(i) \leq f(n) \leftrightarrow h(f(i)) \leq b]\},$$

nazwiemy liczbami *dozwolonymi dla n*. Można więc powiedzieć, że $h(f(n))$ to liczba dozwolona dla n, o najmniejszym możliwym numerze.

Przypuśćmy, że nasza funkcja nie jest surjekcją, i niech m będzie najmniejszą taką liczbą, że $g(m)$ nie jest wartością funkcji h. Ustawmy w ciąg rosnący $b_0 < b_1 < \cdots < b_{m-1}$ liczby $g(i)$ dla $i < m$. Wtedy $h(a_i) = b_i$, dla pewnych liczb $a_0 < a_1 < \cdots < a_{m-1}$. Niech $a_i = f(n_i)$ dla $i < m$. Liczba $g(m)$ należy do jednego z przedziałów $(0, b_0), (b_0, b_1), \ldots, (b_{m-2}, b_{m-1}), (b_{m-1}, \infty)$, powiedzmy do przedziału (b_i, b_{i+1}). (Pozostałe przypadki są analogiczne.) Wybierzmy najmniejszą taką liczbę k, że $f(k)$ należy do przedziału (a_i, a_{i+1}). Wartość $h(f(k))$ należy do przedziału (b_i, b_{i+1}), a skoro jest różna od $g(m)$ i wszystkich $b(i)$, więc musi być postaci $g(n)$ dla pewnego $n > m$.

Mamy teraz dwie możliwości. Jeśli k jest większe od obu liczb n_i, n_{i+1}, to liczby dozwolone dla k tworzą dokładnie przedział (b_i, b_{i+1}), a więc nierówność $n > m$ jest sprzeczna z definicją funkcji h. Jeśli zaś k jest mniejsze od jednej z nich, na przykład od n_i, to wartość $b_i = g(l)$ jest dozwolona dla k, a tymczasem $l < m < n$. To też jest sprzeczne z definicją funkcji h.

Zadanie 2: Niech $F : A \xrightarrow{\text{na}} 2^A$, i niech

$$f(a) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } F(a)(a) = 0; \\ 0, & \text{jeśli } F(a)(a) = 1 \end{cases}$$

Skoro F jest surjekcją więc $f = F(b)$ dla pewnego b i mamy sprzeczność:

$$f(b) = 1 \leftrightarrow f(b) = 0.$$