Podstawy matematyki – klasówka poprawkowa
14 stycznia $(20+25)^2$

1. Niech $\mathbb{N}_+ = \mathbb{N} - \{0\}$. Dla $f, g : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ przyjmujemy, że[1]
$$f r g \iff \forall n (f(n) \,|\, 2n \Leftrightarrow g(n) \,|\, 2n).$$
   (a) Udowodnić (jak najprościej), że r jest relacją równoważności w $\mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$.
   (b) Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.
   (c) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $(\mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+)/_r$?
   (d) Znaleźć wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji tej relacji.

2. Niech $\varphi : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \to (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$ będzie funkcją określoną następująco.
$$\varphi(X)(n) = \overline{\overline{\{k \in X \mid k < n\}}},$$
dla dowolnego $X \subseteq \mathbb{N}$ i $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Czy funkcja φ jest różnowartościowa?
   (b) Czy funkcja φ jest na $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$?
   (c) Wyznaczyć obraz zbioru $\{\varnothing, \mathbb{N}\}$ przy przekształceniu φ.
   (d) Wyznaczyć przeciwobraz zbioru wszystkich funkcji stałych przy funkcji φ.
   (e) Wyznaczyć przeciwobraz zbioru wszystkich surjekcji z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{N}$ przy funkcji φ.

Rozwiązania

1a: Relacja r jest relacją równoważności, bo jest jądrem operacji $\varphi : (\mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+) \to \mathsf{P}(\mathbb{N}_+)$ określonej tak: $\varphi(f) = \{n \in \mathbb{N}_+ \mid f(n) \,|\, 2n\}$.

1b: Trzy różne klasy abstrakcji wyznaczają na przykład funkcje $\lambda n.\, 3n$, $\lambda n.\, 1$ i $\lambda n.\, 4$. Przy operacji φ są te klasy odpowiednio przeciwobrazami: zbioru pustego, zbioru $\mathbb{N}_+$ i zbioru dodatnich liczb parzystych.

1c: Mocą zbioru ilorazowego jest $\mathfrak{C}$. Zbiór ilorazowy jądra funkcji jest tej samej mocy, co zbiór wartości tej funkcji. A w tym przypadku $\mathrm{Rg}(\varphi) = \mathsf{P}(\mathbb{N}_+)$. Inkluzja $\subseteq$ jest oczywista, pozostaje więc sprawdzić, że dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N}_+$ istnieje taka funkcja f, że $A = \{n \mid f(n) \,|\, 2n\}$. Na przykład taka: $f = \lambda n.\, \texttt{if}\ n \in A\ \texttt{then}\ n\ \texttt{else}\ 2n + 1$.

1d: Pokażemy, że każda klasa abstrakcji $[f]_r$ jest mocy continuum. Ograniczenie z góry jest oczywiste, bo $[f]_r \subseteq (\mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+)$, a cały zbiór $\mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ jest takiej mocy. Dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+$ pokażemy, że klasa $[f]_r$ ma co najmniej taką moc jak zbiór $W = \mathbb{N}_+ \to \{0, 1\}$ (a on jest właśnie mocy $\mathfrak{C}$). W tym celu zdefiniujemy różnowartościową funkcję $H : W \xrightarrow{1-1} [f]_r$. Niech $A = \varphi(f) = \{n \mid f(n) \,|\, 2n\}$. Dla $\alpha \in W$ przyjmiemy, że:
$$H(\alpha)(n) = \texttt{if}\ n \in A\ \texttt{then}\ 1 + \alpha(n)\ \texttt{else}\ 2n + 1 + \alpha(n).$$
Zauważmy po pierwsze, że H jest dobrze określona, bo $\varphi(H(\alpha)) = A$ dla każdego α. Istotnie, dla $n \in A$ liczba $1 + \alpha(n)$ jest zawsze równa 1 lub 2 (więc dzieli $2n$), a w przeciwnym przypadku liczba $2n + 1 + \alpha(n)$ nie dzieli $2n$, bo jest za duża.

[1] Napis $k \,|\, n$ oznacza, że liczba k dzieli liczbę n. Inaczej: istnieje takie $d \in \mathbb{N}$, że $n = d \cdot k$.

Pozostaje sprawdzić różnowartościowość funkcji H. Niech $\alpha, \beta : \mathbb{N}_+ \to \{0,1\}$ będą różne, tj. niech $\alpha(n) \neq \beta(n)$ dla pewnego $n \geq 1$. Wtedy także $H(\alpha)(n) \neq H(\beta)(n)$, niezależnie od tego, czy $n \in A$, czy nie.

2a: Tak. Niech $X_1 \neq X_2$ i niech n będzie najmniejszym elementem różnicy symetrycznej $X_1 \dot{-} X_2$. Bez straty ogólności załóżmy, że $n \in X_1 - X_2$. Wtedy $\varphi(X_1)(n) = \varphi(X_2)(n)$, ale

$$\varphi(X_1)(n+1) = \varphi(X_1)(n) + 1 > \varphi(X_2)(n+1) = \varphi(X_2)(n),$$

gdyż $n \in \{k \in X_1 \mid k < n+1\}$ i $n \notin \{k \in X_2 \mid k < n+1\}$.

2b: Nie. Dla dowolnego zbioru X mamy $\varphi(X)(0) = \overline{\overline{\{k \in X \mid k < 0\}}} = 0$, a zatem np. funkcja $\lambda n.\, 5$ nie należy do $\mathrm{Rg}(\varphi)$.

2c: Ponieważ dla dowolnych X i n zachodzi $\{k \in X \mid k < n\} \subseteq X$, więc $\varphi(\varnothing) = \lambda n.\, 0$. Natomiast $\varphi(\mathbb{N}) = \lambda n.\, n$, gdyż dla każdego n zbiór $\{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}$ ma dokładnie n elementów. Wynika stąd, że $\varphi(\{\varnothing, \mathbb{N}\}) = \{\lambda n.0, \lambda n.\, n\}$.

2d: Jak wspomnieliśmy w rozwiązaniu 2b, dla każdego X zachodzi $\varphi(X)(0) = 0$. A zatem jedyną funkcją stałą postaci $\varphi(X)$ jest $\lambda n.\, 0$. Wiemy już z części 2c, że $\varphi(\varnothing) = \lambda n.\, 0$, oraz z części 2a, że funkcja φ jest różnowartościowa. Stąd $\varphi^{-1}(\{\lambda n.\, k \mid k \in \mathbb{N}\}) = \{\varnothing\}$.

2e: Pokażemy, że jest to rodzina $\mathsf{P}_\infty(\mathbb{N})$ wszystkich nieskończonych podzbiorów $\mathbb{N}$. Najpierw rozpatrzmy dowolny zbiór nieskończony $A \subseteq \mathbb{N}$ i ustawmy go w rosnący ciąg nieskończony bez powtórzeń $\zeta : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} A$. Wtedy $\varphi(A)(\zeta(n)) = \overline{\overline{\{\zeta(0), \ldots, \zeta(n-1)\}}} = n$, dla dowolnego n, a więc funkcja $\varphi(A)$ jest surjekcją. Na odwrót, jeśli $\varphi(A)$ jest surjekcją, to zbiór A musi być nieskończony. W przeciwnym razie $\varphi(A)(n) \leq \overline{\overline{A}}$ dla każdego n, więc funkcja $\varphi(A)$ nie przyjmuje na przykład wartości $\overline{\overline{A}} + 14$.