Podstawy matematyki – egzamin zerowy
14 stycznia $(\sum_{i=1}^{9} i)^2$

1. Bijekcję $\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N}$ nazwiemy *skończoną permutacją*, jeśli istnieje takie $n_0 \in \mathbb{N}$, że $\varphi(n) = n$ dla każdego $n \geq n_0$.

   Niech r będzie relacją w zbiorze $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ określoną następująco: $f\, r\, g$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka skończona permutacja φ, że $f = g \circ \varphi$.

   (a) Wskazać wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji tej relacji.

   (b) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy tej relacji?

2. Na potrzeby tego zadania umówmy się, że funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *wypukła* wtedy i tylko wtedy, gdy jest rosnąca i dla dowolnego n zachodzi $2f(n+1) \leq f(n)+f(n+2)$. Jakiej mocy jest zbiór $\mathcal{K}$ wszystkich funkcji wypukłych?

3. Niech $R \subseteq A \times A$ oraz $R \cap \mathbf{1}_A = \varnothing$. Udowodnić, że relacja $(R^{-1})^*$ jest dobrym ufundowaniem wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnej relacji S w A, jeśli $S \subseteq R \cdot S$, to $S = \varnothing$. (Kropka oznacza złożenie relacji.)

Rozwiązania

1a: Zacznijmy od tego, że zbiór $\mathcal{F} = \{\varphi : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{na}]{1-1} \mathbb{N} \mid \exists n_0 \forall n\, (n \geq n_0 \to \varphi(n) = n)\}$ jest mocy $\aleph_0$. Po pierwsze, jest to zbiór nieskończony (a więc co najmniej mocy $\aleph_0$), bo należą do niego wszystkie funkcje postaci $\psi_k = \lambda n.\, \texttt{if } n = 0 \texttt{ then } k \texttt{ else if } n = k \texttt{ then } 0 \texttt{ else } n$. Po drugie, zbiór $\mathcal{F}$ jest przeliczalny (czyli mocy co najwyżej $\aleph_0$), bo jest przeliczalną sumą skończonych zbiorów $\mathcal{F}_m = \{\varphi \in \mathcal{F} \mid \forall n\, (n \geq m \to \varphi(n) = n)\}$.

A zatem każda klasa abstrakcji $[f]_r$ jest przeliczalna, bo funkcja $H : \mathcal{F} \to [f]_r$ dana wzorem $H(\varphi) = f \circ \varphi$ jest oczywiście „na”.

Klasa abstrakcji funkcji stałej jest jednoelementowa, bo jeśli f jest stała, to $f = f \circ \varphi$ dla każdego φ. Pozostałe klasy są nieskończone, a zatem mocy $\aleph_0$. Przypuśćmy bowiem, że funkcja f nie jest stała. Skoro f przyjmuje co najmniej dwie różne wartości, to jedna z nich na pewno nie występuje w ciągu f prawie wszędzie. Inaczej: istnieje taka wartość $k \in \mathrm{Rg}(f)$ i taki nieskończony ciąg rosnący $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$, że $f(n_i) \neq k$ dla wszystkich i. Ale $k \in \mathrm{Rg}(f)$, więc $k = f(r)$ dla pewnego r. Przyjmijmy $\varphi_i(n) = \texttt{if } n = r \texttt{ then } n_i \texttt{ else if } n = n_i \texttt{ then } r \texttt{ else } n$ (permutacja φ_i zamienia miejscami argumenty r i n_i). Wszystkie funkcje $f \circ \varphi_i$ są różne i należą do $[f]_r$.

1b: Jeśli $f = g \circ \varphi$, a funkcja φ jest prawie wszędzie identycznościowa, to funkcje f i g są prawie wszędzie równe. Zatem każda z funkcji f_α, o których mowa w rozwiązaniu zadania 619f w zbiorze zadań, wyznacza inną klasę abstrakcji.

2: Moc naszego zbioru jest oczywiście ograniczona z góry przez $\mathfrak{C}$, bo taka jest moc zbioru wszystkich funkcji z $\mathbb{N}$ do $\mathbb{N}$. Dla oszacowania z dołu skonstruujemy injekcję $G : \mathsf{P}(\mathbb{N} - \{0,1\}) \xrightarrow{1-1} \mathcal{K}$. Dla $A \subseteq \mathbb{N} - \{0,1\}$, funkcja $G(A)$ jest określona następująco: $G(A)(0) = 0$, $G(A)(1) = 1$, a jeśli $n > 1$, to $G(A)(n) = 2G(A)(n-1) - G(A)(n-2) + \chi_A(n)$. Dla dowolnego n mamy teraz $G(A)(n+2) \geq 2G(A)(n+1) - G(A)(n)$, czyli $G(A)(n+2) + G(A)(n) \geq 2G(A)(n+1)$, a więc każda funkcja $G(A)$ jest wypukła. Pozostaje zauważyć, że każda jest inna. Istotnie, jeśli $A \neq B$ i n jest najmniejszym elementem różnicy symetrycznej $A \dot{-} B$, to $G(A)(n) \neq G(B)(n)$.

3: ($\Rightarrow$) Przypuśćmy, że $S \subseteq R \cdot S$ oraz $S \neq \varnothing$, czyli $\langle a, b\rangle \in S$ dla pewnych $a, b \in A$. Zdefiniujemy taki ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, że $\langle a_n, a_{n+1}\rangle \in R$ oraz $\langle a_n, b\rangle \in S$, dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$. Zaczniemy od $a_0 = a$ i dalej użyjemy indukcji. Jeśli $a_0, \ldots, a_n$ są już zdefiniowane, to $\langle a_n, b\rangle \in S \subseteq R \cdot S$ oznacza, że istnieje element c o własności $\langle a_n, c\rangle \in R$ i $\langle c, b\rangle \in S$. Można więc przyjąć $a_{n+1} = c$. Ciąg a_n jest ciągiem malejącym ze względu na relację $(R^{-1})^*$, bo wszystkie jego wyrazy muszą być różne. Istotnie, $a_n \neq a_{n+1}$ bo R jest rozłączna z identycznością, a gdyby $a_n = a_{n+i}$ dla $i > 1$, to elementy a_n i a_{n+1} zaprzeczają antysymetrii relacji R.

($\Leftarrow$) Teraz mamy udowodnić, że relacja $(R^{-1})^*$ jest dobrym ufundowaniem, w szczególności porządkiem częściowym. (Zwrotność i przechodniość mamy wprost z definicji.) Umówmy się, że elememt $a \in A$ nazwiemy *startowym*, gdy istnieje taki ciąg nieskończony a_n, że $\langle a_n, a_{n+1}\rangle \in R$ oraz $a_0 = a$. (Wszystkie wyrazy ciągu też są wtedy startowe.) Wystarczy udowodnić, że elementy startowe nie istnieją. (Z tego w szczególności wynika antysymetria.) Rozpatrzmy relację $S = \{\langle x, y\rangle \mid x \text{ jest startowy}\}$. Zauważmy, że jeśli element a jest startowy, to istnieje taki startowy element b, że $\langle a, b\rangle \in R$. Zatem $S \subseteq R \cdot S$, ale jeśli elementy startowe istnieją, to S jest relacją niepustą, a to przeczy naszemu założeniu.