Podstawy matematyki – klasówka
12 grudnia 2024

1. Dla $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ przyjmujemy, że
$$f r g \iff \forall n (f(n) \leq n^2 + 1 \Leftrightarrow g(n) \leq n^2 + 1).$$
   (a) Udowodnić, możliwie jak najprościej, że r jest relacją równoważności w $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
   (b) Wskazać trzy różne klasy abstrakcji.
   (c) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $(\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_r$?
   (d) Znaleźć wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji tej relacji.

2. Funkcja $\varphi : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ jest określona następująco. Jeśli $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, to:
$$\varphi(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid \text{zbiór } f^{-1}(\{n\}) \text{ jest nieskończony}\}.$$
   (a) Czy funkcja φ jest różnowartościowa?
   (b) Czy funkcja φ jest na $\mathsf{P}(\mathbb{N})$?
   (c) Jaka jest moc zbioru $\varphi^{-1}(\{\mathbb{N}\})$?
   (d) Jaka jest moc zbioru $\varphi(\{f \mid f : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}\})$?

Rozwiązania

1a: Relacja r jest relacją równoważności, bo jest jądrem operacji $\varphi : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \to \mathsf{P}(\mathbb{N})$ określonej tak: $\varphi(f) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \leq n^2 + 1\}$.

1b: Trzy różne klasy abstrakcji wyznaczają na przykład funkcje $\lambda n.\, 0$, $\lambda n.\, 2n^2$, i $\lambda n.\, n^2 + 2$. Są te klasy przeciwobrazami różnych singletonów: $[\lambda n.\, 0]_r = \varphi^{-1}(\{\mathbb{N}\})$, $[\lambda n.\, 2n^2]_r = \varphi^{-1}(\{\{0, 1\}\})$ oraz $[\lambda n. n^2 + 2]_r = \varphi^{-1}(\{\varnothing\})$.

1c: Mocą zbioru ilorazowego jest $\mathfrak{C}$. Zbiór ilorazowy jądra funkcji jest tej samej mocy, co zbiór wartości tej funkcji. Ponieważ $\mathrm{Rg}(\varphi) \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$, więc szukana moc jest ograniczona z góry przez $\mathfrak{C}$. Określimy teraz funkcję $F : \mathsf{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} (\mathbb{N} \to \mathbb{N})/_r$, przyjmując $F(A) = [\lambda n.\, n^2 + 2 - \chi_A(n)]_r$, gdzie χ_A oznacza funkcję charakterystyczną zbioru A. Wtedy $\varphi(\lambda n.\, n^2 + 2 - \chi_A(n)) = A$, dla dowolnego A. No to jeśli $A \neq B$, to także klasy $F(A)$ i $F(B)$ są różne i nasza funkcja F jest faktycznie różnowartościowa. Stąd moc ilorazu jest co najmniej $\mathfrak{C}$ i z twierdzenia Cantora-Bernsteina jest równa $\mathfrak{C}$.

1d: Pokażemy, że każda klasa abstrakcji $[f]_r$ jest mocy continuum. Ograniczenie z góry jest oczywiste, bo $[f]_r \subseteq (\mathbb{N} \to \mathbb{N})$, a cały zbiór $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest takiej mocy. Niech $A = \varphi(f)$. Zdefiniujemy funkcję $H : (\mathbb{N} \to \{0, 1\}) \xrightarrow{1-1} [f]_r$ następująco:
$$H(\alpha)(n) = \texttt{if } n \in A \texttt{ then } \alpha(n) \texttt{ else } n^2 + 2 + \alpha(n).$$
Zauważmy po pierwsze, że H jest dobrze określona, bo $\varphi(H(\alpha)) = A$ dla każdego α. Istotnie, dla $n \in A$ zachodzi $\alpha(n) \leq 1 \leq n^2 + 1$, a w przeciwnym przypadku mamy $n^2 + 1 < n^2 + 2 + \alpha(n)$.

Pozostaje sprawdzić różnowartościowość funkcji H. Niech $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ będą różne, tj. niech $\alpha(n) \neq \beta(n)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy także $H(\alpha)(n) \neq H(\beta)(n)$, niezależnie od tego, czy $n \in A$, czy nie.

2a: Nie. Na przykład $\varphi(\lambda n.\, n \bmod 2) = \varphi(\lambda n.\, 1 - n \bmod 2) = \{0, 1\}$.

2b: Tak, dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N}$ istnieje taka funkcja f, że $A = \varphi(f)$. Jeśli $A = \varnothing$, to na przykład $A = \varphi(\lambda n.\, n)$. Jeśli A jest niepustym zbiorem skończonym, powiedzmy $A = \{a_0, \ldots, a_{k-1}\}$, gdzie $k > 0$, to $A = \varphi(\lambda n.\, a_{n \bmod k})$. Wreszcie niech A będzie zbiorem nieskończonym. Wtedy istnieje bijekcja $b : \mathbb{N} \underset{\text{na}}{\xrightarrow{1-1}} A$. Rozpatrzmy dowolny nieskończony podział $\{X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zbioru $\mathbb{N}$ na nieskończone składowe X_n. (Na przykład $X_n = \{2^n \cdot p - 1 \mid p \text{ jest nieparzyste}\}$.) Niech f będzie taką funkcją, że $f(x) = b(n)$ dla wszystkich $x \in X_n$. Dla każdego $m \in A$, jest takie n, że $m = b(n)$ i wtedy zbiór $f^{-1}(\{m\})$ jest nieskończony, bo zawiera X_n. Ponadto $f^{-1}(\{m\}) = \varnothing$ dla $m \notin A$, skąd $\varphi(f) = A$.

2c: Niech $T = \varphi^{-1}(\{\mathbb{N}\})$. Funkcja f należy do T wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz każdego singletona przy f jest nieskończony. Moc zbioru T jest oczywiście co najwyżej taka jak moc zbioru $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ czyli $\mathfrak{C}$. Pokażemy, że jest równa $\mathfrak{C}$.

Z części 2b wiemy już, że istnieje taka funkcja f, że $\varphi(f) = \mathbb{N}$. Niech $H : (\mathbb{N} \to \mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} T$ będzie taką funkcją, że $H(g)(x) = \texttt{if}\ x \text{ parzyste } \texttt{then}\ f(\frac{x}{2})\ \texttt{else}\ g(\frac{x-1}{2})$. Innymi słowy, ciąg $H(g)$ powstaje przez „przeplatanie” ciągów f i g.

Sprawdźmy, że funkcja H jest dobrze określona. Każdy przeciwobraz $f^{-1}(\{n\}) = \{y \mid f(y) = n\}$ jest nieskończony. Ale jeśli $f(y) = n$, to także $H(g)(2y) = n$, a zatem przeciwobraz $H(g)^{-1}(\{n\})$ też jest nieskończony, bo zawiera nieskończony zbiór $\{2y \mid y \in f^{-1}(\{n\})\}$. Stąd $\varphi(H(g)) = \mathbb{N}$, czyli $H(g) \in T$.

Funkcja H jest różnowartościowa, bo jeśli $g_1(x) \neq g_2(x)$, to także $H(g_1)(2x+1) \neq H(g_2)(2x+1)$. Stąd $\mathfrak{C} = \overline{\overline{\mathbb{N} \to \mathbb{N}}} \leq \overline{\overline{T}}$ i z twierdzenia Cantora-Bernsteina wnioskujemy, że $\overline{\overline{T}} = \mathfrak{C}$.

2d: Jeśli funkcja f jest różnowartościowa, to przeciwobraz każdego singletona jest pusty lub jednoelementowy. Zatem $\varphi(f) = \varnothing$ i szukany obraz to zbiór $\{\varnothing\}$.