Podstawy matematyki – egzamin

28 stycznia 2025

1. Niech $A = \{0, 1, \ldots, 9\}$. Przypomnijmy, że A^* to zbiór wszystkich (skończonych) słów nad alfabetem A. Dla każdego $w \in A^*$ przez $\Sigma(w)$ oznaczmy sumę wszystkich cyfr w słowie w (tj. $\Sigma(\varepsilon) = 0$ oraz $\Sigma(wa) = \Sigma(w) + a$). Dla $u, w \in A^*$ przyjmijmy, że:
$$u \leq w \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \Sigma(u) < \Sigma(w) \;\vee\; (\Sigma(u) = \Sigma(w) \;\wedge\; u \preceq w),$$
gdzie $\preceq$ oznacza zwykły porządek leksykograficzny. Wiadomo, że relacja $\leq$ jest porządkiem liniowym.
   (a) Czy $\langle A^*, \leq \rangle$ jest porządkiem dobrze ufundowanym?
   (b) Czy każdy ograniczony z góry podzbiór A^* ma kres górny?
   (c) Czy odpowiedzi w 1a i 1b zmienią się, jeśli A zamienimy na $B = \{1, \ldots, 9\}$?

2. Niech $\varphi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathsf{P}(\mathsf{P}(\mathbb{N}))$ będzie zdefiniowana następująco:
$$\varphi(f) = \{X \subseteq \mathbb{N} \mid f(X) = X \;\wedge\; f^{-1}(X) = X\}.$$
   (a) Czy funkcja φ jest różnowartościowa? Czy jest „na”?
   (b) Wyznaczyć obraz zbioru wszystkich funkcji stałych.
   (c) Jakiej mocy są przeciwobrazy zbiorów $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ i $\{\{\varnothing\}\}$?

3. Przypomnijmy, że $\mathsf{P}_{\mathsf{fin}}(A)$ oznacza rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów A. Udowodnić, że jeśli rodzina $\mathcal{S} \subseteq \mathsf{P}(\mathbb{N})$ spełnia następujące cztery warunki:
   (a) $\bigcup \mathcal{S} = \mathbb{N}$;
   (b) $\forall A, B\ (A \in \mathcal{S} \;\wedge\; B \subseteq A \;\to\; B \in \mathcal{S})$;
   (c) $\forall A, B\ (A, B \in \mathcal{S} \;\wedge\; A \cap B \neq \varnothing \;\to\; A \cup B \in \mathcal{S})$;
   (d) $\forall A\ (\mathsf{P}_{\mathsf{fin}}(A) \subseteq \mathcal{S} \;\to\; A \in \mathcal{S})$,

   to istnieje zbiór $\mathcal{X}$ i taka funkcja $\psi : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$, że $\mathcal{S} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \psi\restriction_A \text{ jest stała}\}$.

Rozwiązania

1a: Nie, bo istnieją ciągi malejące, np. $3 > 03 > 003 > 0003 > \dots$

1b: Nie. Na przykład zbiór $D = \{w \mid \Sigma(w) = 2\}$ jest ograniczony przez 2025, ale nie ma kresu górnego. Ponieważ zbiór D nie ma największego elementu (jeśli $w \in D$, to $w < w0 \in D$), więc jego ograniczeniami górnymi są elementy zbioru $T = \{w \mid \Sigma(w) \geq 3\}$. A zbiór T nie ma elementu najmniejszego, bo jeśli $w \in T$, to $w > 0^{|w|}w \in T$. (A nawet $w > 0w$, ale to wymaga dowodu przez indukcję.)

1c: Teraz każdy ze zbiorów $B_n = \{w \in B^* \mid \Sigma(w) = n\}$ jest skończony i to zmienia odpowiedź w części 1a. Jeśli bowiem $\varnothing \neq X \subseteq B$, to najmniejszym elementem zbioru X jest najmniejszy element skończonego zbioru $X \cap B_k$, gdzie $k = \min\{n \mid X \cap B_n \neq \varnothing\}$. Zmieni się też odpowiedź w części 1b, bo każdy zbiór ograniczony będzie teraz skończony, a każdy skończony zbiór liniowo uporządkowany ma po prostu największy element.

2a: Funkcja φ nie jest różnowartościowa, bo np. $\varphi(\lambda n\,.0) = \{\varnothing\} = \varphi(\lambda n.\,1)$. Patrz (2b).

Nie jest to też surjekcja. Istotnie, dla każdej funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mamy $f(\varnothing) = \varnothing$ oraz $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, więc $\varnothing \in \varphi(f)$. Stąd nie istnieje np. funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dla której $\varphi(f) = \varnothing$.

2b: Obrazem zbioru wszystkich funkcji stałych jest $\{\{\varnothing\}\}$. Istotnie, jeśli $f = \lambda n.\,k$, to $f(X) = \{k\}$ dla każdego niepustego X. Zatem jedyne zbiory X o własności $f(X) = X$ to $X = \varnothing$ i $X = \{k\}$. Ale $f^{-1}(\{k\}) = \mathbb{N}$, więc zostaje tylko $X = \varnothing$.

2c: Przeciwobrazy zbiorów $\varnothing$ i $\{\varnothing\}$ są puste, czyli są mocy zero. Przeciwobraz zbioru pustego jest pusty z definicji przeciwobrazu, a przeciwobraz zbioru $\{\varnothing\}$ jest pusty dlatego, że dla żadnej funkcji f nie zachodzi $\varphi(f) = \varnothing$ (por. 2a).

Przeciwobraz F zbioru $\{\{\varnothing\}\}$ ma moc continuum. Jest to zbiór tych wszystkich funkcji f, dla których $\varphi(f) = \{\varnothing\}$, czyli takich, dla których jedynym zbiorem spełniającym warunki $f(X) = X$ i $f^{-1}(X) = X$ jest zbiór pusty. Pokazaliśmy już w części 2b, że wszystkie funkcje stałe należą do F. Teraz pokażemy, że jest takich funkcji znacznie więcej. Niech $H : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to F$ będzie zdefiniowane następująco: $H(\alpha)(n) = 2n + 2 + \alpha(n)$. Funkcja H jest oczywiście różnowartościowa, pozostaje wykazać, że jest dobrze określona, tj. że dla każdego $\alpha : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ mamy $\varphi(H(\alpha)) = \{\varnothing\}$. Oczywiście $\varnothing \in H(\alpha)$, niech więc $X \neq \varnothing$ i niech $m = \min X$. Dla dowolnego $k \in X$ mamy $H(\alpha)(k) \geq 2k+2 \geq 2m+2 > m$, skąd $m \notin H(\alpha)(X)$. A zatem $X \neq H(\alpha)(X)$, więc $X \notin \varphi(H(\alpha))$.

Wykazaliśmy więc, że moc F jest ograniczona z dołu przez continuum. Ograniczenie z góry wynika stąd, że $F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, a więc z tw. Cantora-Bernsteina zbiór $F = \varphi^{-1}(\{\{\varnothing\}\})$ jest dokładnie mocy continuum.

3: Rozpatrzmy relację $r = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists A \in \mathcal{S}\,(x, y \in A)\}$ i zauważmy, że to jest relacja równoważności. Zwrotność wynika z warunku (3a), symetria z samej definicji, a przechodniość z warunku (3c): jeśli bowiem $x, y \in A \in \mathcal{S}$ oraz $y, z \in B \in \mathcal{S}$, to $A \cap B \neq \varnothing$ więc $x, z \in A \cup B \in \mathcal{S}$.

Relacja r jest jądrem jakiegoś przekształcenia $\psi : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$; udowodnimy, że dla dowolnego $A \subseteq \mathbb{N}$ zachodzi równoważność $A \in \mathcal{S} \;\Leftrightarrow\; \psi{\restriction}_A$ jest stała. Ale warunek „$\psi{\restriction}_A$ jest stała" oznacza w istocie: „A jest podzbiorem pewnej klasy abstrakcji jądra ψ, czyli relacji r".

Implikacja z lewej do prawej jest oczywista. Jeśli $x, y \in A \in \mathcal{S}$, to $x\,r\,y$ z definicji relacji r, a zatem $\psi(x) = \psi(y)$. Wszystkie wartości ψ dla argumentów z A są więc takie same.

Ponieważ mamy warunek (3b), więc aby udowodnić implikację odwrotną wystarczy sprawdzić, że $\mathbb{N}/_r \subseteq \mathcal{S}$ (że każda klasa abstrakcji relacji r należy do $\mathcal{S}$). Niech więc $x \in \mathbb{N}$. Pokażemy przez indukcję, że każdy skończony podzbiór klasy $[x]_r$ należy do $\mathcal{S}$ i użyjemy warunku (3d). Zbiór pusty i singletony są w $\mathcal{S}$ na mocy (3a) i (3b), zacznijmy więc od zbiorów dwuelementowych. Jeśli $\{a, b\} \subseteq [x]_r$, to $a\,r\,b$, więc istnieje takie $D \in \mathcal{S}$, że $a, b \in D$. Stąd $\{a, b\} \in \mathcal{S}$ bo mamy (3b). Krok indukcyjny wykonamy dzieląc zbiór $n+1$-elementowy na dwie (nierozłączne) części n-elementowe i stosując (3c).