

Podstawy matematyki – klasówka

11 grudnia 2025

1. W zbiorze $P(\mathbb{N})$ określamy relację r w ten sposób, że dla $X, Y \in P(\mathbb{N})$:

$$X r Y \Leftrightarrow (\forall x \in X \exists y \in Y. x \leq y) \wedge (\forall y \in Y \exists x \in X. y \leq x).$$

- (a) Udowodnić, że r jest relacją równoważności.
- (b) Jakiej mocy jest zbiór ilorazowy $P(\mathbb{N})/r$?
- (c) Znaleźć wszystkie liczby kardynalne, które są mocami klas abstrakcji relacji r .

2. Niech $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \mid \text{dla każdego } n \in \mathbb{N} \text{ zbiór } f^{-1}(\{n\}) \text{ jest skończony}\}$.

Definiujemy funkcję $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N})$: dla $f \in \mathcal{F}$ niech $\varphi(f) = \lambda n. \overline{f^{-1}(\{n\})}$.

- (a) Jaka jest moc zbioru $\mathcal{F}$?
- (b) Czy funkcja φ jest różnowartościowa? Czy jest na $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$?
- (c) Udowodnić, że istnieje taka funkcja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, że $\varphi(f) = f$.
- (d) Czy istnieje taka surjekcja $f : \mathbb{N} \xrightarrow{\text{na}} \mathbb{N}$, że $\varphi(f) = f$? A czy istnieje taka funkcja różnowartościowa?

(Wiadomo, że rodzina wszystkich nieskończonych podzbiorów zbioru $\mathbb{N}$ jest mocy continuum.)

Rozwiązania

1a: Symbol $\max X$ oznacza poniżej największy element niepustego skończonego zbioru $X \subseteq \mathbb{N}$. Udowodnimy, że relacja r jest jądrem operacji $m : P(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\perp, \top\}$ (gdzie $\perp$ i $\top$ są różnymi elementami, nie należącymi do $\mathbb{N}$), która jest określona tak:

$$m(X) = \text{if } X = \emptyset \text{ then } \perp \text{ else if } (X \text{ nieskończony}) \text{ then } \top \text{ else } \max X.$$

Stąd natychmiast wnioskujemy, że r jest relacją równoważności.

Przypuśćmy najpierw, że $X r Y$. Jeśli $X = \emptyset$, to z warunku $\forall y \in Y \exists x \in X. x \leq y$ wynika, że Y też jest pusty, skąd $m(X) = m(Y) = \perp$. Z tegoż warunku wynika również, że jeśli X jest skończony, to wszystkie elementy Y są co najwyżej równe $\max X$, czyli Y też jest skończony i $\max Y \leq \max X$. Ale ponieważ $\forall x \in X \exists y \in Y. x \leq y$, więc także $\max X \leq \max Y$ i znowu $m(X) = m(Y)$. Pozostaje już tylko przypadek, gdy oba zbiory są nieskończone, a wtedy $m(X) = m(Y) = \top$.

Teraz załóżmy, że $m(X) = m(Y) = \Delta$. Jeśli $\Delta = \perp$, to oba zbiory są puste i obie części warunku $X r Y$ zachodzą „walkowerem”. Jeśli $\Delta = \top$, to oba zbiory są nieskończone, więc $X r Y$ wynika z tego, że są nieograniczone. A jeśli $\Delta = \max X = \max Y$, to wszystkie elementy X i Y są co najwyżej równe Δ .

1b: Ponieważ funkcja m jest na $\mathbb{N} \cup \{\perp, \top\}$ (dlaczego?), więc zbiór ilorazowy jest równoliczny ze zbiorem $\mathbb{N} \cup \{\perp, \top\}$, a ten ostatni jest oczywiście mocy $\aleph_0$.

1c: Klasa abstrakcji zbioru pustego ma tylko jeden element, co już zauważyliśmy poprzednio. Klasę abstrakcji każdego zbioru skończonego X tworzą wszystkie zbiory o tym samym maksimum, czyli wszystkie zbiory postaci $\{\max X\} \cup Z$, gdzie $Z \subseteq \{n \mid n < \max X\}$. Jest ich $2^{\max X}$. Wreszcie wszystkie zbiory nieskończone tworzą jedną klasę mocy $\mathfrak{C}$. A zatem szukane liczby kardynalne to $\mathfrak{C}$ i wszystkie potęgi dwójki.

2a: Ponieważ $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, więc oczywiście $\overline{\overline{\mathcal{F}}} \leq \mathfrak{C}$. Aby udowodnić nierówność odwrotną, zdefiniujemy injekcję $H : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \xrightarrow{1-1} \mathcal{F}$ w ten sposób: dla $A \subseteq \mathbb{N}$ przyjmujemy

$$H(A) = \lambda n. \text{ if } n \in A \text{ then } 2n \text{ else } 2n + 1.$$

Funkcja H jest dobrze określona, bo przeciwbraz każdego singletona $\{m\}$ przy operacji $H(A)$ ma co najwyżej jeden element, a mianowicie $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$. Sprawdźmy, że funkcja H jest różnowartościowa. Jeśli $A \neq B$, to istnieje taka liczba a , że $a \in A - B$ lub $a \in B - A$. Wtedy $H(A)(n) \neq H(B)(n)$, bo jedna z tych liczb jest parzysta, a druga nie. Stąd $H(A) \neq H(B)$. A zatem także $\mathfrak{C} \leq \overline{\overline{\mathcal{F}}}$, więc z twierdzenia Cantora-Bernsteina wynika $\overline{\overline{\mathcal{F}}} = \mathfrak{C}$.

2b: Funkcja φ nie jest różnowartościowa. Istotnie, niech $f_1 = \lambda n. \text{ if } n \leq 1 \text{ then } 1 - n \text{ else } n$ oraz $f_2 = \lambda n. n$. Wówczas $f_1 \neq f_2$, ale $\varphi(f_1) = \lambda n. 1 = \varphi(f_2)$. Funkcja φ nie jest też surjekcją. Na przykład funkcja stale równa zero nie jest postaci $\varphi(f)$ dla żadnej funkcji f . Ponieważ zbiór $f^{-1}(\{f(0)\})$ jest zawsze niepusty (należy tam zero), więc zawsze $\varphi(f)(f(0)) \neq 0$.

2c: Równość $\varphi(f) = f$ oznacza, że każda liczba n występuje dokładnie $f(n)$ razy w ciągu f . Zdefiniujemy taką funkcję f przez indukcję. Na początek niech $f(0) = f(2) = 1$, $f(1) = 2$, $f(3) = 0$, $f(4) = 4$. Teraz założmy, że wartości $f(x)$ są już określone dla $x \leq n \geq 4$ i spełniają następujące warunki, które są naszym założeniem indukcyjnym:

- (a) dla każdego $x \leq n$ zachodzi nierówność $f(x) \leq n$;
- (b) dla każdego $x \leq n$ zbiór $T_x^n = \{y \leq n \mid f(y) = x\}$ ma co najwyżej $f(x)$ elementów;
- (c) istnieje takie $z \leq n$, że zbiór T_z^n ma *mniej* niż $f(z)$ elementów.

Zauważmy, że T_4^4 ma tylko 1 element, oraz $1 < 4 = f(4)$. Zatem warunki (a-c) są spełnione dla $n = 4$. Weźmy najmniejszą liczbę z spełniającą (c) i niech $f(n+1) = z$. (Na przykład $f(5) = 4$, ponieważ zbiory T_x^4 , dla $x \leq 3$ mają już po $f(x)$ elementów). Sprawdźmy, że warunki (a-c) będą nadal spełnione gdy wstawimy $n+1$ w miejscu n .

- (a) Wystarczy zauważyć, że $f(n+1) = z \leq n \leq n+1$.
- (b) Zbiory T_x^{n+1} dla $x \leq n$ są równe zbiorom T_x^n jeśli tylko $x \neq z$ (bo $f(n+1) = z$). Z kolei zbiór T_z^{n+1} jest większy o 1 element od T_z^n , a zatem ma nie więcej elementów niż $f(z)$. Nowy zbiór $T_{n+1}^{n+1} = \{y \leq n+1 \mid f(y) = n+1\}$ jest pusty, bo dla każdego $x \leq n+1$ mamy $f(x) \leq n$, w szczególności $f(n+1) = z \leq n$. Ponieważ $f(n+1) = z > 0$, więc zbiór T_{n+1}^{n+1} też ma nie więcej niż $f(n+1)$ elementów. A zatem wszystkie zbiory T_x^{n+1} dla $x \leq n+1$ mają co najwyżej po $f(x)$ elementów.

- (c) Ponieważ $T_{n+1}^{n+1} = \emptyset$ i $f(n+1) > 0$, więc warunek zachodzi dla $z = n+1$.

Pozostaje udowodnić, że dla każdego $x \geq 4$ istnieje takie n , dla którego zbiór T_x^n jest już dokładnie $f(x)$ -elementowy. Najlepiej przez indukcję: przypuśćmy, że dla każdego $y < x$ zbiór $T_y^{n_y}$ ma już $f(y)$ elementów i niech $n = \max\{n_y \mid y < x\}$. Wtedy wszystkie zbiory T_y^n też są dobre. Jeśli T_x^n ma $f(x)$ elementów, to gotowe, w przeciwnym razie ma $f(x) - k$ elementów dla pewnego k . Z definicji funkcji f wynika, że $f(n+1) = f(n+2) = \dots = f(n+x-k) = x$. Ale teraz łatwo widzieć, że T_x^{n+x-k} jest już dobry.

2d: Funkcja spełniająca równość $\varphi(f) = f$ nie może być na $\mathbb{N}$, bo wtedy $f(n) = 0$ dla pewnego n , więc $f^{-1}(\{n\}) = \emptyset$, skąd $n \notin \text{Rg}(f)$. Punkt stały operacji φ nie może też być funkcją różnowartościową. Istotnie, jeśli $f : \mathbb{N} \xrightarrow{1-1} \mathbb{N}$, to f ma nieskończenie wiele różnych wartości, w szczególności $\varphi(f)(n) = f(n) \geq 2$ dla pewnego n , co oznacza, że zbiór $f^{-1}(\{n\})$ ma przynajmniej dwa różne elementy a, b . No ale wtedy $f(a) = n = f(b)$, więc f nie jest różnowartościowa.