Przypadek ogólny

Twierdzenie: *Rozszerzony rachunek lambda ma własność silnej normalizacji ze względu na β-redukcje.*

Dowód: Redukujemy rozszerzony rachunek lambda do zwykłego (z jedną stałą typową).
Najpierw tłumaczymy typy:

$$\begin{aligned}
|\alpha| &= 0, \quad \text{gdy } \alpha = \bot, p, q, \ldots \\
|\sigma \to \tau| &= |\sigma| \to |\tau| \\
|\sigma \wedge \tau| &= (|\sigma| \to |\tau| \to 0) \to 0 \\
|\sigma \vee \tau| &= (|\sigma| \to 0) \to (|\tau| \to 0) \to 0
\end{aligned}$$

Uwaga: zawsze $|\sigma| = \sigma_1 \to \cdots \to \sigma_n \to 0$.

Translacja dla termów (1)

$$\begin{aligned}
|x^\sigma| &= x^{|\sigma|} \\
|\lambda x^\tau . M^\sigma| &= \lambda x^{|\tau|}.\, |M|^{|\sigma|} \\
|M^{\sigma\to\tau} N^\sigma| &= |M|^{|\sigma|\to|\tau|} |N|^{|\sigma|} \\
|\langle M, N\rangle^{\sigma\wedge\tau}| &= \lambda z^{|\sigma|\to|\tau|\to 0}.\, z|M|^{|\sigma|}|N|^{|\tau|} \\
|\mathrm{in}_1(A^\sigma)^{\sigma\vee\tau}| &= \lambda x^{|\sigma|\to 0}.\lambda y^{|\tau|\to 0}.\, x|A|^{|\sigma|} \\
|\mathrm{in}_2(B^\tau)^{\sigma\vee\tau}| &= \lambda x^{|\sigma|\to 0}.\lambda y^{|\tau|\to 0}.\, y|B|^{|\tau|}
\end{aligned}$$

Translacja dla termów (2)

$(|\sigma| = \sigma_1 \to \cdots \to \sigma_n \to 0, \quad |\tau| = \tau_1 \to \cdots \to \tau_m \to 0.)$

$$|\sigma \wedge \tau| = (|\sigma| \to |\tau| \to 0) \to 0$$

$$\begin{aligned}
|P^{\sigma\wedge\tau}\{1\}| &= \lambda x_1^{\sigma_1} \ldots \lambda x_n^{\sigma_n}.\, |P|^{|\sigma\wedge\tau|}(\lambda x^{|\sigma|}\lambda y^{|\tau|}.\, (x x_1 \ldots x_n)^0) \\
|P^{\sigma\wedge\tau}\{2\}| &= \lambda x_1^{\tau_1} \ldots \lambda x_m^{\tau_m}.\, |P|^{|\sigma\wedge\tau|}(\lambda x^{|\sigma|}\lambda y^{|\tau|}\, (y x_1 \ldots x_m)^0) \\
|M^\bot[\sigma]| &= \lambda x_1^{\sigma_1} \ldots \lambda x_n^{\sigma_n}. |M|^0
\end{aligned}$$

Jak to działa?

$M = \langle P, Q\rangle\{1\} \to P$ tłumaczy się tak:

$$\begin{aligned}
|M| &= \lambda x_1^{\sigma_1} \ldots \lambda x_n^{\sigma_n}.\, (\lambda z.\, z|P||Q|)(\lambda xy.\, x x_1 \ldots x_n) \\
&\to_\beta \lambda x_1^{\sigma_1} \ldots \lambda x_n^{\sigma_n}.\, (\lambda xy.\, x x_1 \ldots x_n)|P||Q| \\
&\twoheadrightarrow_\beta \lambda x_1^{\sigma_1} \ldots \lambda x_n^{\sigma_n}.\, |P| x_1 \ldots x_n \\
&\twoheadrightarrow_\eta |P|
\end{aligned}$$

Translacja dla termów (3)

$$\begin{aligned}
&|M^{\sigma\vee\tau}[x^\sigma.\, P^\rho;\ y^\tau.\, Q^\rho]| = \\
&\quad \lambda x_1^{\rho_1} \ldots \lambda x_k^{\rho_k}. |M|(\lambda x^{|\sigma|}. |P|^{|\rho|} x_1 \ldots x_k)(\lambda y^{|\tau|}. |Q|^{|\rho|} x_1 \ldots x_k),
\end{aligned}$$

gdzie $|M| : (|\sigma| \to 0) \to (|\tau| \to 0) \to 0$,
oraz $|\rho| = \rho_1 \to \cdots \to \rho_k \to 0$.

Jak to działa?

$M = (\mathrm{in}_1\, P^\tau)[u^\tau.\, Q^\rho;\ v^\sigma.\, R^\rho] \ \to\ Q[u := P]$
tłumaczy się tak:

$$\begin{aligned}
|M| &= \lambda\vec{x}.\, |\mathrm{in}_1\, P|(\lambda u.\, |Q|\, \vec{x})(\lambda v.\, |R|\, \vec{x}) \\
&= \lambda\vec{x}.\, (\lambda xy.\, x|P|)(\lambda u.\, |Q|\, \vec{x})(\lambda v.\, |R|\, \vec{x}) \\
&\twoheadrightarrow \lambda\vec{x}.\, (\lambda u.\, |Q|\, \vec{x})|P| \\
&\twoheadrightarrow \lambda\vec{x}.\, |Q|[u := |P|]\vec{x} \\
&= \lambda\vec{x}.\, |Q[u := P]|\vec{x} \\
&\twoheadrightarrow_\eta |Q[u := P]|
\end{aligned}$$

Własności translacji

Lemat:
- $|M[x := N]| = |M|[x := |N|]$.
- Jeśli $M : \sigma$, to $|M| : |\sigma|$.
- Jeśli $M \to_\beta M'$, to $|M| \twoheadrightarrow_{\beta\eta}^{+} |M'|$.

Twierdzenie: *Rozszerzony rachunek lambda ma własność silnej normalizacji ze względu na β-redukcje.*

Dowód: Przypuśćmy, że $M_0^\tau \to M_1^\tau \to M_2^\tau \to \cdots$

Wtedy także $|M_0| \twoheadrightarrow_{\beta\eta}^{+} |M_1| \twoheadrightarrow_{\beta\eta}^{+} |M_2| \twoheadrightarrow_{\beta\eta}^{+} \cdots$