Rachunek sekwentów dla klasycznej logiki zdaniowej

Sekwent: napis postaci $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi_1, \ldots, \psi_m$, gdzie φ_i i ψ_j są formułami. Zarówno m jak n może być zerem.

Aksjomaty: sekwenty postaci $\varphi \vdash \varphi$.

Reguły należy rozumieć tak: jeśli sekwent górny jest dowodliwy to sekwent dolny też. Notacja: duże litery greckie oznaczają ciągi formuł; napis Γ, φ oznacza ciąg powstały przez dopisanie φ do ciągu Γ, etc.

Wymiana: $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \vdash \Sigma}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \Sigma}$(LW) $\quad \dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \varphi, \Sigma}$(PW)

Osłabianie: $\dfrac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}$(LO) $\quad \dfrac{\Gamma \vdash \Pi}{\Gamma \vdash \varphi, \Pi}$(PO)

Skracanie: $\dfrac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}$(LS) $\quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \varphi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma}$(PS)

Koniunkcja: $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Sigma}$(LK) $\dfrac{\Gamma, \psi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Sigma} \quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma \quad \Gamma \vdash \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Sigma}$(PK)

Alternatywa: $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma \quad \Gamma, \psi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Sigma}$(LA) $\quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Sigma}(PA)\dfrac{\Gamma \vdash \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Sigma}$

Implikacja: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma \quad \Delta, \psi \vdash \Pi}{\Gamma, \Delta, \varphi \to \psi \vdash \Sigma, \Pi}$(LI) $\quad \dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \Sigma}$(PI)

Negacja: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Pi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Pi}$(LN) $\quad \dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Pi}{\Gamma \vdash \neg\varphi, \Pi}$(PN)

Prawda i fałsz: $\Gamma, \bot \vdash$ (LF) $\quad \Gamma \vdash \top, \Sigma$ (PP)(nie ma (PF) ani (LP))

Cięcie: $\dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Pi \quad \Delta, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma, \Delta \vdash \Pi, \Sigma}$(Ciach!)

Wariant intuicjonistyczny dopuszcza tylko sekwenty postaci $\Gamma \vdash \varphi$ i $\Gamma \vdash \varnothing$, gdzie $\varnothing$ oznacza ciąg pusty. Reguły (PW) i (PS) tracą sens. W pozostałych regułach należy przyjąć, że ciąg Σ ma co najwyżej jeden element, a ciąg Π jest pusty.

Reguły multiplikatywne (bezkontekstowe):

Koniunkcja: $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Sigma}$ (L$\wedge$) $\quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma \quad \Delta \vdash \psi, \Pi}{\Gamma, \Delta \vdash \varphi \wedge \psi, \Sigma, \Pi}$ (P$\wedge$)

Alternatywa: $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma \quad \Delta, \psi \vdash \Pi}{\Gamma, \Delta, \varphi \vee \psi \vdash \Sigma, \Pi}$ (L$\vee$) $\quad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \vee \psi, \Sigma}$ (R$\vee$)

Prawda: $\dfrac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \top \vdash \Sigma}$ (L$\top$) $\quad \vdash \top$ (P$\top$)

Fałsz: $\bot \vdash$ (L$\bot$) $\quad \dfrac{\Gamma \vdash \Pi}{\Gamma \vdash \bot, \Pi}$ (P$\bot$)