Semantyka kontynuacyjna

Znaczenie wyrażenia = jego wpływ na „cały program”.

0 – typ „całego programu” (typ efektu).

$k : \mathrm{int} \to 0$ – „kontynuacja typu int”

Znaczenie wyrażenia $N : \mathrm{int}$, to funkcja $\underline{N} : (\mathrm{int} \to 0) \to 0$.

Na przykład $\underline{5} = \lambda k^{\mathrm{int}\to 0}.\, k(5)$.

Ogólniej, dla $: N : \mathrm{int}$,

$\underline{N} = \lambda k^{\mathrm{int}\to 0}.\, N \rhd k$, gdzie $N \rhd k$ to „N przekazane do k”.

Kontynuacje dla funkcji (CBN)

typ termu	sposób użycia	typ kontynuacji	semantyka
τ	$\tau^\bullet$	$\tau^\bullet \to 0$	$\underline{\tau} = (\tau^\bullet \to 0) \to 0$
p	p	$p \to 0$	$(p \to 0) \to 0$
$\perp$	0	$0 \to 0$	$(0 \to 0) \to 0$
$\tau \to \sigma$	$\underline{\tau} \to \underline{\sigma}$	$(\underline{\tau} \to \underline{\sigma}) \to 0$	$((\underline{\tau} \to \underline{\sigma}) \to 0) \to 0$

Kontynuacje dla koniunkcji i alternatywy

Naturalny „sposób użycia”:

$(\tau \wedge \sigma)^\bullet = (\underline{\tau} \wedge \underline{\sigma})$

$(\tau \vee \sigma)^\bullet = (\underline{\tau} \vee \underline{\sigma})$

Funkcyjny „sposób użycia”:

$(\tau \wedge \sigma)^\bullet = (\underline{\tau} \to \underline{\sigma} \to 0) \to 0$

$(\tau \vee \sigma)^\bullet = (\underline{\tau} \to 0) \to (\underline{\sigma} \to 0) \to 0$

Translacja dla typów: $\underline{\tau} = (\tau^\bullet \to 0) \to 0$

$$
\begin{aligned}
p^\bullet &= p \\
\perp^\bullet &= 0 \\
(\tau \to \sigma)^\bullet &= (\underline{\tau} \to \underline{\sigma}) \\
(\tau \wedge \sigma)^\bullet &= (\underline{\tau} \to \underline{\sigma} \to 0) \to 0 \\
(\tau \vee \sigma)^\bullet &= (\underline{\tau} \to 0) \to (\underline{\sigma} \to 0) \to 0
\end{aligned}
$$

Translacja dla termów: $\underline{M} = \lambda k^{\tau^\bullet \to 0}.\, M \rhd k$

$$
\begin{aligned}
x^\tau \rhd K &= x^{\underline{\tau}}(K) \\
(\lambda x^\sigma.\, M^\mu) \rhd K &= K(\lambda x^{\underline{\sigma}}.\, \underline{M}^{\underline{\mu}}) \\
\langle M^\sigma, N^\mu \rangle \rhd K &= K(\lambda z^{\underline{\mu}\to\underline{\sigma}\to 0}.\, z\underline{M}\,\underline{N}) \\
\mathrm{in}_1(M) \rhd K &= K(\lambda y^{\underline{\mu}\to 0} z^{\underline{\sigma}\to 0}.\, y\underline{M}) \\
(M^\rho E)^\tau \rhd K &= M \rhd (E@K)
\end{aligned}
$$

$E@K : \rho^\bullet \to 0$ to eliminator E włączony do kontynuacji K.

Dołączanie eliminatora do kontynuacji $K : \tau^\bullet \to 0$

Ma być tak:

$(M^\rho E)^\tau \rhd K = M \rhd (E@K)$

Przypadek aplikacji: $\rho = \sigma \to \tau$.

$(M^{\sigma\to\tau} N^\sigma)^\tau \rhd K = M \rhd (N@K)$

$N^\sigma @K = \lambda m^{\underline{\sigma}\to\underline{\tau}}.\, m\underline{N}K : (\sigma \to \tau)^\bullet \to 0$

Tutaj $K : \tau^\bullet \to 0$ jest kontynuacją dla $MN : \tau$.

$N@K : (\underline{\sigma} \to \underline{\tau}) \to 0$ jest kontynuacją dla $M : \sigma \to \tau$.

Dołączanie eliminatora do kontynuacji $K : \tau^\bullet \to 0$

$$
\begin{aligned}
N@K &= \lambda m^{\underline{\sigma}\to\underline{\tau}}.\, m\underline{N}K : (\tau \to \sigma)^\bullet \to 0 \\
\{2\}@K &= \lambda m^{(\underline{\tau}\to\underline{\sigma}\to 0)\to 0}.\, m(\lambda x^{\underline{\tau}} y^{\underline{\sigma}}.\, yK) : (\tau \wedge \sigma)^\bullet \to 0 \\
[x^\mu.S^\tau, y^\rho.T^\tau]@K &= \lambda m^{(\mu\vee\rho)^\bullet}.\, m(\lambda x^{\underline{\mu}}.\, S \rhd K)(\lambda y^{\underline{\rho}}.\, T \rhd K) \\
[\rho]@K &= (\lambda k m^0.\, m)K : 0 \to 0
\end{aligned}
$$

$(\mu \vee \sigma)^\bullet = (\underline{\mu} \to 0) \to (\underline{\sigma} \to 0) \to 0$

Własności translacji

- *Jeśli* $\Gamma \vdash M : \tau$, *to* $\underline{\Gamma} \vdash \underline{M} : \underline{\tau}$, *gdzie* $\underline{\Gamma}(x) = \underline{\Gamma(x)}$.
- $(M \rhd K)[x^{\underline{\sigma}} := \underline{N}] \twoheadrightarrow_\beta M[x^\sigma := N] \rhd K[x^{\underline{\sigma}} := \underline{N}]$.
- *Jeśli* $M \to_\beta M'$, *to* $\underline{M} \twoheadrightarrow_\beta^+ \underline{M'}$.
- *Niech* $\to_\pi$ *oznacza permutacje postaci* $N[x.S, y.T]E \to_\pi N[x.SE, y.TE]$.

  Jeśli $M \to_\pi M'$, *to* $\underline{M} = \underline{M'}$.