Logika i teoria typów

Wykład 14

25 stycznia 2023

Ogłoszenie

Egzamin 1 lutego, w godzinach 9–12

jest przeniesiony do sali 2044

Zaczynamy o 9:00

Na egzaminie można mieć jedną kartkę formatu A4
z samodzielnie przygotowanymi odręcznymi notatkami.
Inne pomoce są niedozwolone.

Paradoks Girarda-Hurkensa

Twierdzenie: *Nie istnieją takie funkcje* $set : A \to \mathsf{P}(A)$, *oraz* $el : \mathsf{P}(A) \to A$, *że* $set \circ el = El \circ Set$, *gdzie:*

$El(\mathcal{X}) = \{el(Y) \mid Y \in \mathcal{X}\} \quad Set(X) = \{set(a) \mid a \in X\}$.

Założenia: $set : A \to \mathsf{P}(A)$, $el : \mathsf{P}(A) \to A$, $set \circ el = El \circ Set$.

Definicje:

- Dla $a \in A$ piszemy $a' = el(set(a))$.
- Relacja $\approx$ to najmniejsza relacja równoważności, spełniająca $a \approx a'$ dla każdego $a \in A$.

Główny pomysł: Elementy zbioru $X \subseteq A$ wyznaczają te same klasy abstrakcji relacji $\approx$, co elementy zbioru

$$set(el(X)) = El(Set(X)) = \{x' \mid x \in X\}$$

Zatem funkcja set jest „na" z dokładnością do $\approx$.

Ściślej: niech $\overline{X} = \{[a]_\approx \mid a \in X\}$ dla $X \subseteq A$ i niech $X \equiv Y$ oznacza $\overline{X} = \overline{Y}$. Wtedy mamy surjekcję $A/_\approx \xrightarrow{\text{na}} \mathsf{P}(A)/_\equiv$ i równoliczność $\mathsf{P}(A/_\approx) \sim \mathsf{P}(A)/_\equiv$.

Paradoks Girarda-Hurkensa

Twierdzenie: *Nie istnieją takie funkcje* $set : A \to \mathsf{P}(A)$, *oraz* $el : \mathsf{P}(A) \to A$, *że* $set \circ el = El \circ Set$, *gdzie:*

$El(\mathcal{X}) = \{el(Y) \mid Y \in \mathcal{X}\} \quad Set(X) = \{set(a) \mid a \in X\}$.

Formalizacja

- Jeśli zbiór reprezentujemy w CC jako typ τ, to potęga $\mathsf{P}(\tau) = (\tau \Rightarrow *)$ jest rodzajem.
- Jeśli zbiór reprezentujemy w CC jako rodzaj κ, to potęga $\mathsf{P}(\kappa) = (\kappa \Rightarrow *)$ też jest rodzajem.
- Równość Leibniza:

  $$\alpha =^\kappa \beta \text{ oznacza } \forall \gamma^{\kappa \to *}.\, \gamma\alpha \to \gamma\beta.$$

- Jeśli $f : \kappa \to \varrho$, to $F = Lift\, f : \mathsf{P}(\kappa) \to \mathsf{P}(\varrho)$, gdzie:

  $$Lift\, f = \lambda X^{\mathsf{P}(\kappa)} \lambda y^\varrho (\exists x^\kappa.\, fx =^\varrho y).$$

  Moralnie $F(X) = Lift\, f\, X$ to obraz X przy f.

Sprzeczne otoczenie typowe:

W tym otoczeniu można sformalizować paradoks Hurkensa tj., skonstruować term typu $\bot = \forall p : *.\, p$:

$\kappa : \Box,\ el : \mathsf{P}(\kappa) \to \kappa,\ set : \kappa \to \mathsf{P}(\kappa),$

$v : \forall X^{\mathsf{P}(\kappa)} \forall \alpha^\kappa (set(el X)\alpha \leftrightarrow \exists \beta^\kappa (X\beta \wedge \alpha =^\kappa el(set \beta))).$

Inaczej: $v : set \circ el = El \circ Set$ (ekstensjonalnie).

W rachunku konstrukcji tego się nie da zdefiniować.

System sprzeczny

- System λU: rozszerzenie CC o sort Δ, aksjomat $\Box : \Delta$ i reguły $(\Delta, \Box)$ i $(\Delta, *)$.
- System λU^-: bez tej drugiej reguły.
- To jest „polimorfizm rodzajowy": można definiować polimorficzne konstruktory, np.:

  $$\lambda \kappa^\Box \lambda \alpha^{\kappa \to \kappa} \lambda \beta^\kappa.\, \alpha(\alpha\beta) : \Pi \kappa{:}\Box((\kappa \to \kappa) \to \kappa \to \kappa).$$

Rodzaj paradoksalny

$$\kappa = \mu k^{\Box}\mathsf{P}(k) = \forall k^{\Box}((\mathsf{P}(k) \to k) \to k).$$

Można tak zdefiniować funkcje *el* i *set*, że otrzymamy otoczenie paradoksalne:

$\mathrm{Elim} = \lambda k^{\Box}\lambda f^{\mathsf{P}(k)\to k}\lambda z^{\kappa}.\, zkf$

$el = in = \lambda X^{\mathsf{P}(\kappa)}\Lambda k^{\Box}\lambda y^{\mathsf{P}(k)\to k}.\, y(Lift(\mathrm{Elim}\,k\,y)X),$

$set = out = \mathrm{Elim}_{\mathsf{P}(\kappa)}(Lift(in)).$

Wtedy $set \circ el = El \circ Set$.

Type is not a type

System "type is a type" jest sprzeczny. Tę samą konstrukcję można powtórzyć zamieniając wszędzie $\Box$ i Δ na $*$.

Zakręcone kombinatory (?)

System "type is a type" jest sprzeczny, więc nie ma własności SN. Hipoteza: w tym systemie można zdefiniować kombinator punktu stałego:

$$YF \twoheadrightarrow F(YF)$$

Wiadomo, że są tzw. looping combinators:

$$Y_0F \twoheadrightarrow F(Y_1F) \twoheadrightarrow F^2(Y_2F) \twoheadrightarrow F^3(Y_3F) \twoheadrightarrow \cdots$$

Inne konstrukcje sprzeczne

Podobne paradoksy pojawiają się m.in. w systemach dopuszczających:

- "Silną sumę" tj. utożsamienie $\exists\alpha : *.\,\sigma$ z produktem zależnym $(\alpha : *) \times \sigma$, dopuszczającym rzutowanie $\pi_1 : \exists\alpha : *.\,\sigma \to *$ o własności $\pi_1[\tau, M] = \tau$;
- Rodzaje indukcyjne nie-ściśle pozytywne, np. rodzaj κ z konstruktorem typu $((\kappa \to *) \to *) \to \kappa$, czyli typu $\mathsf{P}(\mathsf{P}(\kappa)) \to \kappa$.

Homotopijna teoria typów

(Apetajzer)

Równość w teorii typów

- Konwersja $x =_{\beta\delta} y$ (judgmental/definitional equality);
- Definiowalna formułą, np. równość Leibniza;
- Propositional equality: predykat indukcyjny $x =_A y$ z jednym konstruktorem $refl_A(x) : x =_A x$.

Ściślej: to jest rodzina predykatów indukcyjnych

$$eq(A)(x) : A \to *, \text{ dla dowolnego } x : A$$

Propositional equality in Coq

parametry — *typ indeksu*

$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$

```
Inductive eq (A : Type) (x : A) : A -> Prop :=
    eq_refl : x = x

eq_ind
     : forall (A : Type) (x : A) (P : A -> Prop),
       P x -> forall y : A, x = y -> P y

eq_rec
     : forall (A : Type) (x : A) (P : A -> Set),
       P x -> forall y : A, x = y -> P y
```


Indukcja

Dla liczb naturalnych:

Niech $C : \mathrm{int} \to \mathcal{U}$ oraz
$c_0 : C(0), \quad c_1 : (x : \mathrm{int}) \to C(x) \to C(s\,x)$.

To wyznacza taką funkcję $f : (y : \mathrm{int}) \to C(y)$, że $f(0) = c_0$, oraz $f(s\,x) = c_1\,x\,(f\,x)$, dla $x : \mathrm{int}$.

Dla równości:

Niech $C(x) : (y : A) \to (x =_A y) \to \mathcal{U}$, oraz $c(x) : C(x, x, refl_A(x))$.

To wyznacza taką funkcję $f(x) : (y : A) \to (p : x =_A y) \to C(x, y, p)$, że $f(x, x, refl_A(x)) = c(x)$, dla $x : A$.

Indukcja dla równości (path induction)

Niech $C(x) : (y : A) \to (x =_A y) \to \mathcal{U}$, oraz $c(x) : C(x, x, refl_A(x))$.

To wyznacza taką funkcję $f(x) : (y : A) \to (p : x =_A y) \to C(x, y, p)$, że $f(x, x, refl_A(x)) = c(x)$, dla $x : A$.

Sens moralny: Każdy element typu $x =_A y$ ma te same własności, co $refl_A(x) : x =_A x$.

Uwaga:

To nie znaczy, że $p : x =_A y$ to to samo, co $refl_A(x)$. (Nawet typy $x =_A y$ i $x =_A x$ są różne, gdy $x \neq_{\beta\delta} y$.)

Indukcja dla równości (path induction)

Fakt: *Jeśli $F : A \to B$, oraz $x =_A y$, to $Fx =_B Fy$.*

Dowód: Bierzemy $C(x) : (y : A) \to (x =_A y) \to \mathbf{Prop}$ określone tak: $C(x, y, p) = (Fx =_B Fy)$, oraz

$c(x) = refl_B(Fx) : C(x, x, refl_B(x))$.

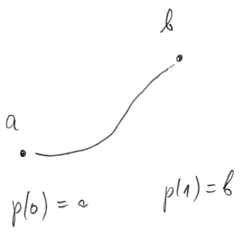
To wyznacza $f(x) : (y : A) \to (p : x =_A y) \to C(x, y, p)$, i wtedy $f(x, y, p) : Fx =_B Fy$.

Przy tym $f(x, x, refl_A(x)) = c(x) = refl_B(Fx)$.

Interpretacja topologiczna

Typy to przestrzenie topologiczne. (Ozn. $\mathbb{I} = [0, 1]$.)

Obiekt $p : a =_A b$ to *droga* od a do b w przestrzeni A, czyli taka funkcja ciągła $p : \mathbb{I} \to A$, że $p(0) = a$, $p(1) = b$.



Równość jest kongruencją

Fakt 1: *Jeśli $F : A \to B$, oraz $x =_A y$, to $Fx =_B Fy$.*

Dowód kolokwialny:

Skoro teza zachodzi dla $(x, x, refl_A(x))$, to zachodzi dla dowolnej trójki (x, y, p).

Interpretacja topologiczna:

Funkcja ciągła przeprowadza drogę w drogę.

Droga powrotna

Fakt 1: *Jeśli $x =_A y$, to $y =_A x$. Ściślej: istnieje funkcja*
$\lambda p.\, p^{-1} : (x =_A y) \to (y =_A x)$.

Dowód: Niech $C(x, y, p) = (y =_A x)$ i niech
$c(x) = refl_A(x) : C(x, x, refl_A(x))$.

To określa taką funkcję $f(x) : (y : A) \to (p : x =_A y) \to (y =_A x)$,

że $f(x, x, refl_A(x)) = c(x) = refl_A(x)$.

Czyli jeśli $p : x =_A y$, to $p^{-1} = f(x, y, p)$.

Uwaga: z tego wynika, że $(refl_A(x))^{-1} = refl_A(x)$.

Składanie dróg

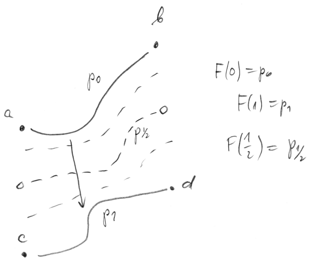
Fakt 2: *Jeśli $p : x =_A y$ oraz $q : y =_A z$, to $p \cdot q : x =_A z$. Na dodatek, $p \cdot p^{-1} = refl_A(x)$.*

Dowód: Indukcja.

Interpretacja topologiczna

Równość między drogami $p : a =_A b$, $p' : c =_A d$, to droga w przestrzeni dróg, czyli taka funkcja ciągła $\phi : \mathbb{I} \to x =_A y$, że $\phi(0) = p$, $\phi(1) = p'$.

To pojęcie można uogólnić na dowolne funkcje.



Homotopia

Niech $f, g : A \to B$ to funkcje ciągłe.

Homotopia od f do g, to taka funkcja ciągła

$$\Phi : \mathbb{I} \times A \to B,$$

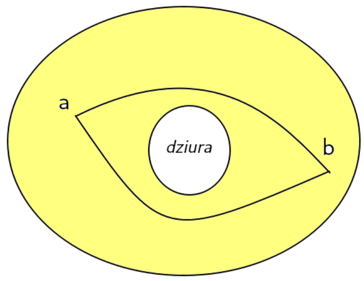
że dla dowolnego $x \in A$ zachodzi

$$\Phi(0, x) = f(x) \quad \text{i} \quad \Phi(1, x) = g(x)$$

Równość jako homotopia

- Każdy element typu $a =_A b$ ma te same własności, co $refl_A(x) : a =_A a$.
- Bo każda droga od a do b jest homotopijna (w odpowiedniej przestrzeni) z trywialną pętlą od a do a.
- Ale nie każde dwa elementy typu $a =_A b$ są równe.
- Bo w przestrzeni dróg od a do b może nie być takiej homotopii.

Te drogi nie są homotopijne



Czego się nie da udowodnić przez indukcję?

Pytanie 1: Skoro każda równość to tak naprawdę $refl_A(x)$, to czy z założenia $p : x =_A y$ wynika $p = refl_A(x)$?

Odpowiedź: Nie, bo p ma typ $x =_A y$, a $refl_A(x)$ ma typ $x =_A x$. Równość $p = refl_A(x)$ w ogóle nie ma sensu.

Pytanie 2: Czy z założenia $p : x =_A x$ wynika

$$p =_{\mathrm{id}_A(x,x)} refl_A(x)?$$

Nie, bo nie umiemy określić tezy indukcyjnej, tj. rodziny

$$C(x) : (y : A) \to (x =_A y) \to \mathcal{U},$$

żeby $C(x, x, refl_A(x)) = (refl_A(x) =_{\mathrm{id}_A(x,x)} refl_A(x))$

Bo tak $C(x, y, p) = (p =_{??} refl_A(x))$ się nie da.

Dlaczego...

...z tego, że $p : x =_A x$ nie wynika $p = refl_A(x)$?

Odpowiedź topologiczna: bo nie każda pętla zwinie się do trywialnej, jeśli trzymamy oba końce.

Odpowiedź teoriotypowa: bo to nie *typ* $x =_A x$ jest indukcyjny, ale *rodzina* $\Pi_{y:A}\, x =_A y$.

Inaczej: indukcja musi być jednostajna ze względu na y.

Fibracja (rozwłóknienie)

Przestrzeń topologiczna to kategoria, gdzie morfizmy to drogi.

Fibracja to funktor $\pi : E \to B$ o takiej własności:

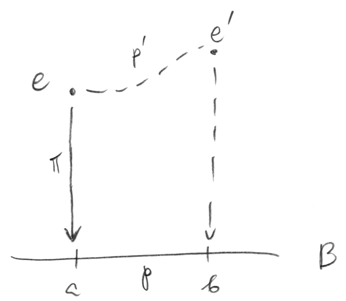
Dla dowolnego $e \in E$:

jeśli $\pi(e) = a$ oraz w przestrzeni B jest droga p od a do b,

to istnieją $e' \in E$ i taka droga p' od e do e', że $\pi(p') = p$

Przestrzeń E to „przestrzeń całkowita (totalna)”, a B to „przestrzeń bazowa”.

Fibracja



Transport, czyli równość Leibniza

Fakt 2: *Jeśli $F : A \to B$, oraz $p : x =_A y$, to istnieje funkcja $p^* : Fx \to Fy$.*

Dowód: Niech $C(x, y, p) := (Fx \to Fy)$ oraz $c(x, refl_A(x)) := \mathrm{id} : Fx \to Fx$. Wtedy $c(x, refl_A(x)) : C(x, x, refl_A(x))$, więc przez indukcję dostajemy $f(x, y, p) : Fx \to Fy$.

Uwaga: $refl_A(x)^* = \mathrm{id}$

Typ zależny to fibracja

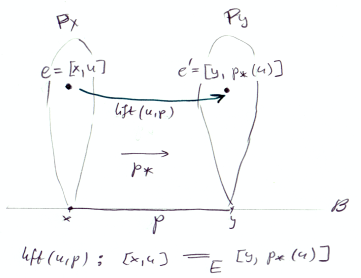
Rodzina typów (typ zależny) $P : B \to \mathcal{U}$ przypisuje każdemu obiektowi $x : B$ pewien typ $P(x)$. Przestrzeń całkowita, to koprodukt $E = \Sigma_{x:B} P(x)$ czyli $E = (x : B) \times P(x)$. Funktor $\pi : E \to B$, to pierwsze rzutowanie: $\pi[x, u] = x$.

Jeśli $p : x =_B y$, to $p_* : P(x) \to P(y)$.
Wtedy $[x, u] =_E [y, p_*(u)]$.

Dowód: Można stosować indukcję do rodziny $C(x, y, p) = ([x, u] =_E [y, p_*(u)])$, ponieważ $[x, u] =_E [x, u] = [x, refl_A(x)^*(u)]$

Typ zależny to fibracja

Jeśli $p : x =_B y$, to $p_* : P(x) \to P(y)$.
Wtedy : $[x, u] =_E [y, p_*(u)]$.



Każda równość to *refl* (w pewnym sensie)

Czy $p : x =_A y$ jest równe *refl*?

Czy każda droga od x do y jest homotopijna z trywialną pętlą?

Odpowiedź: Tak, w odpowiedniej przestrzeni.

Co to za przestrzeń?

To suma zależna $E = \Sigma_{y:A}(x =_A y)$.

Niech $p : x =_A y$. Wtedy jest $q : (x, y) =_{A \times A} (x, x)$. Zatem jest $r : [x, y, p] =_E [x, x, q_*(p)]$.

Na koniec $q_*(p) =_{x=_A x} refl_A(x)$, też przez indukcję.

Homotopia

Homotopia to ekstensjonalna równość funkcji (z A do B):

$H : f \sim g$ to funkcja $H : (a : A) \to f(a) =_B g(a)$.

Interpretacja: Jeśli drogę $p : f(a) =_B g(a)$ uważamy za funkcję $p : [0, 1] \to B$, to homotopia jest funkcją $H : A \to [0, 1] \to B$.

A to jest moralnie to samo, co $H : [0, 1] \to (A \to B)$.

Univalent Foundations

Funkcja $f : A \to B$ jest *równoważnością*, jeśli ma obie funkcje odwrotne:

$$isequiv(f) := \Sigma_{g:B\to A}(f \circ g \sim id_B) \times \Sigma_{h:B\to A}(h \circ f \sim id_A)$$

Oznaczenie $A \simeq B := \Sigma_{f:A\to B}\, isequiv(f)$.

Dwie rzeczy, których nie da się udowodnić:

- Ekstensjonalność dla funkcji: Jeśli $f \sim g$, to $f = g$.
- Równoważność to równość: Jeśli $A \simeq B$, to $A = B$.

Postulujemy te własności jako aksjomaty.

Aksjomat ekstensjonalności

Jeśli $f, g : \Pi_{x:A}B(x)$, to równość $f =_{\Pi_{x:A}B(x)} g$ jest równoważna homotopii między f i g.

Ściślej, definiujemy

$\mathsf{happly}_{f,g} : (f =_{\Pi_{x:A}B(x)} g) \to \Pi_{x:A}(f(x) =_{B(x)} g(x))$

przez indukcję i przyjmujemy regułę:

$$\frac{\Gamma \vdash f : \Pi_{x:A}B(x) \qquad \Gamma \vdash g : \Pi_{x:A}B(x)}{\Gamma \vdash \mathsf{funext}(f, g) : isequiv(\mathsf{happly}_{f,g})}$$

Inaczej: typy $f \sim g$ i $f = g$ uważamy za izomorficzne.

Aksjomat uniwalencji (jednowartościowości?)

Równość $A =_{\mathcal{U}} B$ i równoważność

$$A \simeq B = \Sigma_{f:A\to B}\, isequiv(f)$$

są tym samym. Ściślej, są równoważne:

$$(A =_{\mathcal{U}} B) \simeq (A \simeq B).$$

Definiujemy przez indukcję funkcję

$$\mathsf{idtoeqv}_{A,B} : (A =_{\mathcal{U}} B) \to (A \simeq B)$$

i przyjmujemy regułę:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash \mathsf{univalence}_{A,B} : isequiv(\mathsf{idtoeqv}_{A,B})}$$

dla nowej stałej $\mathsf{univalence}_{A,B}$

Pożytek z uniwalencji

Utożsamiamy konstrukcje równoważne, np. typy izomorficzne:

$$(A \times B) \to C = A \to B \to C,$$

w tym typy indukcyjne *strukturalnie równoważne*,

albo izomorficzne struktury algebraiczne.

Przykład: półgrupa to obiekt (A, m, P) typu

$\Sigma_{A:\mathcal{U}}\Sigma_{m:A\to A\to A}\forall_{x,y,z:A}.\ m(x, m(y, z)) =_A m(m(x, y), z)$.

Równoważność półgrup to tyle, co izomorfizm.

Zatem izomorficzne półgrupy są identyczne.

Pożytek z uniwalencji

W języku homotopijnej teorii typów (HoTT) można formalizować konstrukcje matematyczne i dowody w sposób wygodny dla matematyka.

Formalna teoria homotopii dostarcza semantyki dla tego formalizmu.

Metatwierdzenia

- Silna normalizacja.
- Niesprzeczność.
- Rozstrzygalność poprawności osądu $\Gamma \vdash a : A$

Klasyfikacja obiektów

- Typ A jest *zaledwie zdaniem* (mere proposition), gdy dla dowolnych $x, y : A$ zachodzi $x =_A y$. (Proof irrelevance.)
- Typ A jest *zbiorem*, gdy dla dowolnych $x, y : A$ i dowolnych $p, q : x =_A y$ zachodzi $p =_{x =_A y} q$.
  Ściślej: gdy niepusty jest typ
  $$\mathrm{isSet}(A) := \Pi_{x,y:A}\Pi_{p,q:x=_A y}(p = q)$$
- Typ A jest 1-*typem*, gdy dla dowolnych $x, y : A$, dowolnych $p, q : x =_A y$ i $r, s : p =_{x=_A y} q$ zachodzi $r =_{\dots} s$.
- Dalej mamy 2-typy, 3-typy...

Zaledwie zdania (Mere propositions)

- Dodanie do HoTT aksjomatu
  $$\mathrm{LEM!} = \Pi_{A:\mathcal{U}}(A \oplus (A \to \varnothing))$$
  prowadzi do sprzeczności.
- Typ A jest *zaledwie zdaniem* (mere proposition), gdy dla dowolnych $x, y : A$ zachodzi $x =_A y$. (Proof irrelevance.)

  Ściślej: gdy niepusty jest typ
  $$\mathrm{isProp}(A) := \Pi_{x,y:A}(x =_A y).$$
- Ten aksjomat nie prowadzi do sprzeczności:
  $$\mathrm{LEM} = \Pi_{A:\mathcal{U}}(\mathrm{isProp}(A) \to A \oplus (A \to \varnothing))$$

Wyższe typy indukcyjne

Typ składa się nie tylko z elementów,

ale także z równości (dróg) między elementami,

i z równości (homotopii) między drogami,

i między homotopiami dróg, itd. (wyższy grupoid)

Konstruktory typu indukcyjnego mogą (powinny?) definiować

nie tylko *obiekty* ale także *drogi* (dowolnego rzędu).

Przykład 1: iloraz

To w Coqu nie przejdzie:

```
Inductive Quotient (A:Set)(R: A -> Prop) : Set :=
| klasa :  A -> Quotient A R
| tosamo:(a,b:A) -> R a b -> (klasa a = klasa b).
```

Deklaracja `R: A -> Prop` oznacza, że `R` jest zaledwie relacją. (Spodziewamy się tu relacji równoważności.)

Przykład 2: okrąg

```
Inductive Circle :  Type :=
| base :  Circle
| loop :  base = base.
```

Sens: Jeden punkt, ale nieskończenie wiele różnych pętli.

Grupa podstawowa okręgu to $\mathbb{Z}$.

Indukcja dla okręgu

Definiujemy taką funkcję $f : S^1 \to T$, że $f(\mathit{base}) = b : T$ oraz $f(\mathit{loop}) = \ell : b =_T b$.

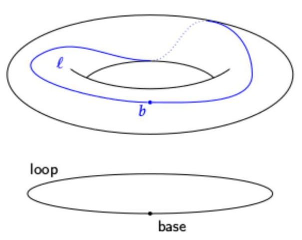


Figure 6.1: The topological induction principle for S^1

Obrazek z *The HoTT Book*, `https://homotopytypetheory.org/book/`

Przykład 3: torus

```
Inductive Torus :  Type :=
| base :  Sphere
| tędy, owędy :  base = base.
| abel :  tędy ∘ owędy = owędy ∘ tędy.
```

Sens: Jeden punkt, dwie permutowalne pętle,

Grupa podstawowa torusa, to $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Przykład 4: sfera

Inductive Sphere : Type :=

| base : Sphere

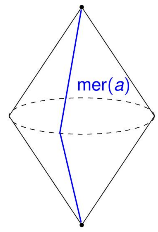
| surf : $\mathtt{refl}_{\mathtt{base}} =_{\mathtt{base}=\mathtt{base}} \mathtt{refl}_{\mathtt{base}}$

Sens: Jeden punkt, jedna trywialna pętla, ale nieskończenie wiele różnych homotopii dla tej jednej pętli.

Grupa podstawowa sfery jest trywialna, ale jej druga grupa homotopii to $\mathbb{Z}$.

Przykład 5: suspension (zawieszenie?)

```
Inductive susp (A:Type) : Type :=
| north : susp A
| south : susp A
| mer : A -> (north = south).
```

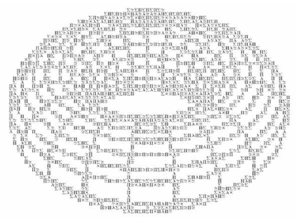


Obrazek z http://home.sandiego.edu/ shulman/hottseminar2012/

Więcej tutaj: https://homotopytypetheory.org/book/

Homotopy Type Theory

UNIVALENT FOUNDATIONS OF MATHEMATICS



The Univalent Foundations Program
Institute for Advanced Study