

Logika i teoria typów

Wykład 9

7 grudnia 2022

Czy dla logiki klasycznej można zdefiniować rachunek lambda?

1. Notacja dla dowodów – to łatwe: trzeba tylko wymyślić składnię dla reguły (Cheat).
2. Ale czy to ma sens obliczeniowy?
3. A jak wyglądają klasyczne reguły gry?

1

2

Logika klasyczna

$$\frac{\Gamma, a: \neg\alpha \vdash M : \perp}{\Gamma \vdash \mu a: \neg\alpha. M : \alpha} \qquad \frac{\Gamma, a: \neg\alpha \vdash M : \alpha}{\Gamma, a: \neg\alpha \vdash [a]M : \perp}$$

Term  $\mu a^{(\neg p \vee \neg p)}. [a](in_2(\lambda z^p. [a](in_1(z))))$  ma typ  $p \vee \neg p$ .

Jeśli  $a \notin FV(M)$ , to zamiast  $\mu a: \neg\alpha. M$  piszemy  $M[a]$ .

Sens obliczeniowy

Co można zrobić z dowodem postaci  $\mu a^{-\alpha} \dots [a]M^\alpha \dots$ ?  
Wyjąć dowód  $M : \alpha$  ze środka i wyrzucić resztę!

Co wyjąć z tego dowodu:

$$\lambda x^{(p \rightarrow q) \rightarrow p} \mu a^{-p}. [a](x(\lambda z^p. \varepsilon_q([a]z)))?$$

Przeszkody: niebieskie  $[a]$ , czerwone  $z$ .

3

4

Idziemy w zaparte

Kiedy jest naprawdę ważne, co jest wewnątrz  $[a]M$ ?  
Przy ewaluacji wyrażenia  $[a]M$  w jakimś kontekście.  
Niedospecyfikowane fragmenty termu  $M$  mogą wtedy  
– okazać się nieistotne;  
– zostać dookreślone.

Sens obliczeniowy

$$\mu a^{-\alpha}(\dots [a]M^\alpha \dots) \implies M^\alpha ?$$

$$\mu a^{-\alpha} N \implies N[[a] := \lambda m. \text{abort}(m)] ?$$

Timothy Griffin (1990):

$$E[\mu a^{-\alpha} N] \implies N[[a] := \lambda m. \text{abort}(E[m])]$$

5

6

Sens obliczeniowy: „sterowanie nielokalnie”

$$\mu a. M \equiv \text{catch } a \text{ in } M$$

$$[a]M \equiv \text{throw } M \text{ to } [a]$$

Internalizacja Griffina

$$E[\mu a^{-\alpha} N] \implies N[[a] := \lambda m. \text{abort}(E[m])]$$

Rachunek  $\lambda\mu$  (Michel Parigot<sup>1</sup>, 1992):

– Otoczenie  $E$  może być „wchłaniane” częściowo.

<sup>1</sup>Nie mylić z rachunkiem  $\mu$ .

7

8

$(\beta)$   $(\lambda x^\alpha M)N \Rightarrow M[x := N]$ .

$(\eta\mu)$   $\mu a^{-\alpha}. [a]M^\alpha \Rightarrow M$ , gdy  $a \notin \text{FV}(M)$ .

$(\zeta)$   $(\mu a^{-(\alpha \rightarrow \beta)}. M)N \Rightarrow \mu b^{-\beta}. M[[a] := \lambda X. [b](XN)]$

Zeta inaczej:

$(\zeta)$   $(\mu a^{-(\alpha \rightarrow \beta)}. M)N \Rightarrow \mu b^{-\beta}. M[[a]\square := [b](\square N)]$

Może być jeszcze:

$(\beta^\mu)$   $[b](\mu a^{-\alpha}. M) \Rightarrow M[a := b]$

9

## Bajka Selingera

The evil king calls the poor shepherd and gives him these orders:  
*"You must bring me the philosopher's stone, or you have to find a way to turn the philosopher's stone into gold.*  
*If you don't, your head will be taken off tomorrow!"*  
 What can the poor shepherd do to save his life?

The next day the poor shepherd brings to the king's palace a huge machine. The machine has two openings.  
 One is marked *"Put the philosopher's stone here!"*  
 and the other *"The gold will fall out from here".*

That will perfectly work as long as the king cannot put the philosopher's stone into the machine.

11

## Gry klasyczne

$\exists$ ros może zmieniać cel gry.

Inaczej: gra może mieć wiele celów,

Osiągnięcie dowolnego celu jest wygraną  $\exists$ rosa.

Dlaczego?

Tajna broń  $\exists$ rosa: prawo Peirce'a  $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$

Z pozycji  $\Gamma \vdash \alpha$   $\exists$ ros może przejść do  $\Gamma, \alpha \rightarrow \beta \vdash \alpha$ .

W przyszłości można zmienić cel  $\beta$  na cel  $\alpha$ .

13

## Gry klasyczne

$\exists$ ros może zmieniać cel gry.

Inaczej: gra może mieć wiele celów,

Osiągnięcie dowolnego celu jest wygraną  $\exists$ rosa.

Zamiast zadania postaci  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi$ ,

mamy zadanie postaci  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi_1, \dots, \psi_m$ .

To się nazywa *sekwent*.

15

**Twierdzenie** (K. Nakazawa, M. Tatsuta, 2008)

Rachunek  $\lambda\mu$  ma własność silnej normalizacji

**Dowód** Redukcja do zwykłego rachunku lambda, podobna do redukcji de Groote'a. (Semantyka kontynuacyjna czyli translacja Kołmogorowa.)

10

## Bajka Selingera: zakończenie

But what if, somehow, the king comes into the possession of the philosopher's stone?

Then the shepherd's brother, hidden inside the machine, will grab the stone, and hand it discretely to the shepherd. The shepherd now can say: *"Oops, Your Majesty, I've been mistaken. Here is the philosopher's stone!"*.

12

## Złożoność klasycznej logiki implikacyjnej

**Twierdzenie** (Stålmarck, 1989)

Klasyczny rachunek zdań z samą implikacją jest co-NP-zupełny.

**Dowód** Strategia  $\exists$ rosa: systematycznie korzystaj:

- z prawa Peirce'a, gromadząc dostęp do wszystkich możliwych celów,
- z taktyki *intro*, gromadząc wszystkie możliwe założenia.

Tu nie ma żadnego niedeterminizmu: to jest czysto uniwersalny automat monotoniczny.

On potrafi tyle, co „uniwersalna” maszyna Turinga.

14

## Klasyczny rachunek sekwentów

Reguły są na Moodle:

<https://moodle.mimuw.edu.pl/mod/resource/view.php?id=106276>

16

Sekwenty:  $\underbrace{\varphi_1, \dots, \varphi_n}_{\text{założenia}} \vdash \underbrace{\psi_1, \dots, \psi_m}_{\text{wnioski}} \quad (n, m \geq 0)$

Aksjomaty:  $\varphi \vdash \varphi$

- Reguły:
- strukturalne,
  - logiczne,
  - reguła cięcia.

17

Wymiana:  $\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \vdash \Sigma}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \Sigma} \text{ (LX)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \varphi, \Sigma} \text{ (RX)}$

Skracanie:  $\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma} \text{ (LC)} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \varphi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma} \text{ (RC)}$

Można uważać, że sekwent to para zbiorów.

Oslabianie:  $\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma} \text{ (LW)} \quad \frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma} \text{ (RW)}$

18

Porównanie

Naturalna dedukcja: Eliminacja i wprowadzanie

$\frac{\Gamma \vdash \alpha \diamond \beta}{\dots} \text{ (Elim } \diamond) \quad \frac{\dots \alpha \dots \beta \dots}{\Gamma \vdash \alpha \diamond \beta} \text{ (Intro } \diamond)$

Rachunek sekwentów: Wprowadzanie z prawej i z lewej

$\frac{\dots \alpha \dots \beta \dots}{\dots, \alpha \diamond \beta \vdash \dots} \text{ (L } \diamond) \quad \frac{\dots \alpha \dots \beta \dots}{\dots \vdash \alpha \diamond \beta, \dots} \text{ (R } \diamond)$

19

Reguły logiczne

$\frac{\Gamma, \varphi_i \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \Sigma} \text{ (LK)} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma \quad \Gamma \vdash \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Sigma} \text{ (RK)}$

$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma \quad \Gamma, \psi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Sigma} \text{ (LA)} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi_i, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2, \Sigma} \text{ (RA)}$

$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma \quad \Delta, \psi \vdash \Pi}{\Gamma, \Delta, \varphi \rightarrow \psi \vdash \Sigma, \Pi} \text{ (LI)} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi, \Sigma} \text{ (RI)}$

$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma}{\Gamma, \neg \varphi \vdash \Sigma} \text{ (LN)} \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \neg \varphi, \Sigma} \text{ (RN)}$

$\Gamma, \perp \vdash \text{ (LF)} \quad \Gamma \vdash \top, \Sigma \text{ (RT)}$

20

Reguła cięcia

$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma \quad \Delta, \varphi \vdash \Pi}{\Gamma, \Delta \vdash \Sigma, \Pi} \text{ (cut)}$

Pełność: Sekwent  $\varphi_1, \dots, \varphi_n \vdash \psi_1, \dots, \psi_m$  ma dowód wtw, gdy  $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi_1 \vee \dots \vee \psi_m$  jest tautologią.

Dowód używa reguły cięcia, np. tak:

$\frac{\Delta \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \psi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash \psi} \text{ (cut)}}{\Delta, \Gamma \vdash \psi}$

21

Przykład:  $\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

$\frac{\frac{\frac{p \vdash p}{p \vdash q, p} \text{ (RW)}}{p \vdash q, p} \text{ (RI)}}{\vdash p \rightarrow q, p} \quad \frac{p \vdash p}{p \vdash p} \text{ (LI)} \quad \frac{\vdash p \rightarrow q, p \quad p \vdash p}{(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p, p} \text{ (RC)} \quad \frac{(p \rightarrow q) \rightarrow p \vdash p, p}{\vdash ((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p} \text{ (RI)}$

22

Przykład:  $\vdash p \vee \neg p$

$\frac{\frac{\frac{p \vdash p}{\vdash \neg p, p} \text{ (RN)}}{\vdash p \vee \neg p, p} \text{ (RA)}}{\vdash p, p \vee \neg p} \text{ (RX)} \quad \frac{\vdash p, p \vee \neg p}{\vdash p \vee \neg p, p \vee \neg p} \text{ (RA)} \quad \frac{\vdash p \vee \neg p, p \vee \neg p}{\vdash p \vee \neg p} \text{ (RC)}$

23

Gentzen's Hauptsatz

Twierdzenie (o eliminacji cięcia):

Jeśli sekwent  $\Gamma \vdash \Delta$  ma dowód, to ma dowód bez cięcia.

Zasada podformuł:

Formuły występujące w przesłankach każdej reguły są podformułami formuł występujących w konkluzji.

Dowód bez cięcia sekwentu  $\vdash \varphi$  używa tylko podformuł  $\varphi$ .

Dowód budujemy od końca, „rozbijając” formuły na części.

24

**Własność podformuł:**

Formuły występujące w przesłankach każdej reguły są podformułami formuł występujących w konkluzji.

**Wniosek:** Dowód formuły  $\varphi$  wymaga tylko reguł dla spójników, które występują w  $\varphi$ .

**Przykład eliminacji cięcia: Dowód**

$$\frac{\begin{array}{c} (1) \\ \vdots \\ \Gamma, \varphi \vdash \psi \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} (2) \\ \vdots \\ \Gamma \vdash \varphi \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} (3) \\ \vdots \\ \Gamma, \psi \vdash \vartheta \end{array}}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash \vartheta} (L \rightarrow)}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} (R \rightarrow) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash \vartheta}{\Gamma \vdash \vartheta} (Cut)$$

przekształcamy w dowód:

$$\frac{\frac{\begin{array}{c} (2) \\ \vdots \\ \Gamma \vdash \varphi \end{array} \quad \frac{\begin{array}{c} (1) \\ \vdots \\ \Gamma, \varphi \vdash \psi \end{array}}{\Gamma \vdash \psi} (Cut)}{\Gamma \vdash \psi} \quad \frac{\begin{array}{c} (3) \\ \vdots \\ \Gamma, \psi \vdash \vartheta \end{array}}{\Gamma, \psi \vdash \vartheta} (Cut)}{\Gamma \vdash \vartheta} (Cut)$$

25

26

**Kłopotliwy przypadek**

$$\frac{\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \frac{\Delta, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Delta, \varphi \vdash \psi}}{\Gamma, \Delta \vdash \psi} \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Delta, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \Delta, \varphi \vdash \psi}}$$

**Rozwiązanie:**

Zamiast zwykłej reguły cięcia rozważa się „multi-cut”:

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma, \varphi, \dots, \varphi \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} \text{ (multi)}$$

27

28

**Intuicjonistyczny rachunek sekwentów**

Sekwenty mają (co najwyżej) jedną formułę po prawej stronie.

**Wymiana:**  $\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \vdash \sigma}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \sigma} (LX)$

**Oślabianie:**  $\frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \sigma} (LW)$   $\frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} (RW)$

**Skracanie:**  $\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \sigma} (LC)$

**Cięcie:**  $\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} (cut)$

**Intuicjonistyczny rachunek sekwentów**

$$\begin{array}{ll} \frac{\Gamma, \varphi_i \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \sigma} (LK) & \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi} (RK) \\ \frac{\Gamma, \varphi \vdash \sigma \quad \Gamma, \psi \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \sigma} (LA) & \frac{\Gamma \vdash \varphi_i}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} (RA) \\ \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma, \psi \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi \rightarrow \psi \vdash \sigma} (LI) & \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} (RI) \\ \frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \neg \varphi \vdash \perp} (LN) & \frac{\Gamma, \varphi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \varphi} (RN) \\ \Gamma, \perp \vdash \sigma (LF) & \Gamma \vdash \top (RT) \end{array}$$

29

30

**Przypisanie termów (1)**

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi \quad \Gamma \vdash N : \psi}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \varphi \wedge \psi} (RK)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi_i}{\Gamma \vdash \text{in}_i(M) : \varphi_1 \vee \varphi_2} (RA)$$

$$\frac{\Gamma, x : \varphi \vdash M : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^\varphi. M : \varphi \rightarrow \psi} (RI)$$

**Przypisanie termów (2)**

$$\frac{\Gamma, x : \varphi_i \vdash M : \sigma}{\Gamma, y : \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash M[x := y\{i\}] : \sigma} (LK)$$

$$\frac{\Gamma, x : \varphi \vdash M : \sigma \quad \Gamma, y : \psi \vdash N : \sigma}{\Gamma, z : \varphi \vee \psi \vdash z[x.M; y.N] : \sigma} (LA)$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi \quad \Gamma, x : \psi \vdash N : \sigma}{\Gamma, y : \varphi \rightarrow \psi \vdash N[x := yM] : \sigma} (LI)$$

$$\Gamma, x : \perp \vdash x[\sigma] : \sigma (LF)$$

31

**Przypisanie termów (3)**

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi \quad \Gamma, x : \varphi \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash N[x := M] : \sigma} (cut)$$

32

## Postaci normalne

**Fakt:** *Termy dowodowe dla rachunku sekwentów bez cięcia, to dokładnie postaci normalne ze względu na beta-redukcję i permutacje.*

**Wniosek:** *Jeśli  $\vdash \alpha \vee \beta$ , to  $\vdash \alpha$  lub  $\vdash \beta$ .*

**Dowód:** Jeśli  $\emptyset \vdash M : \alpha \vee \beta$ , to  $M = \text{in} \dots$   
Inaczej: żadna reguła nie pasuje oprócz (RV).

No dobrze, ale dlaczego to nie działa dla logiki klasycznej?

Bo jest jeszcze skracanie z prawej.

33

## Rules for conjunction in sequent calculus

First choice (additive):

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Sigma} (L\&) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Gamma \vdash \beta, \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta, \Sigma} (R\&)$$

Second choice (multiplicative):

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Sigma} (L\otimes) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Delta \vdash \beta, \Pi}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \wedge \beta, \Sigma, \Pi} (R\otimes)$$

W obecności reguł strukturalnych można wybrać cokolwiek.

34

## Reguły strukturalne

**Wymiana:**  $\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \vdash \Sigma}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \Sigma} (LX) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \varphi, \Sigma} (RX)$

**Oślabianie:**  $\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma} (LW) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma} (RW)$

Bez osłabiania: każde założenie musi być wykorzystane.

**Skracanie:**  $\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma} (LC) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \varphi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma} (RC)$

Bez skracania: każde założenie może być użyte tylko raz.

35

## Logika liniowa

36

## Linear logic: the data flow paradigm

- ▶ Correctness criterion = construction respecting resources.
- ▶ Intuitionistic construction is a *function*, linear construction is an *action*.
- ▶ An assumption has to be used (consumed) exactly once: cannot be re-used nor abandoned.
- ▶ But some resources are re-usable ( $!\alpha$ ).

37

## Lizak

Linear implication  $\alpha \multimap \beta$  represents the type of process in which the assumption (resource)  $\alpha$  is processed into the conclusion  $\beta$ , without re-using any part of it, and without leaving any unused garbage.

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma \quad \Delta, \psi \vdash \Pi}{\Gamma, \Delta, \varphi \multimap \psi \vdash \Sigma, \Pi} (L\multimap) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \multimap \psi, \Sigma} (R\multimap)$$

38

## Przykład

Wnioskowania niepoprawne liniowo:

$p, q \not\vdash p$

$(p \multimap p \multimap q), p \not\vdash q$

$p, p, p \multimap q, q \multimap q \multimap r \not\vdash r$

39

## Dwie koniunkcje

Wraz (with):

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \& \beta \vdash \Sigma} (L\&) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Gamma \vdash \beta, \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta, \Sigma} (R\&)$$

Tensor:

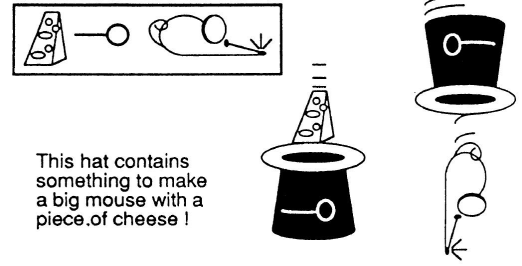
$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \otimes \beta \vdash \Sigma} (L\otimes) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Delta \vdash \beta, \Pi}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \otimes \beta, \Sigma, \Pi} (R\otimes)$$

40

An object of type  $\alpha \otimes \beta$  is a pair of objects: one of type  $\alpha$ , the other of type  $\beta$ . Creating each component of the pair requires separate resources. Consuming a pair requires using both components.

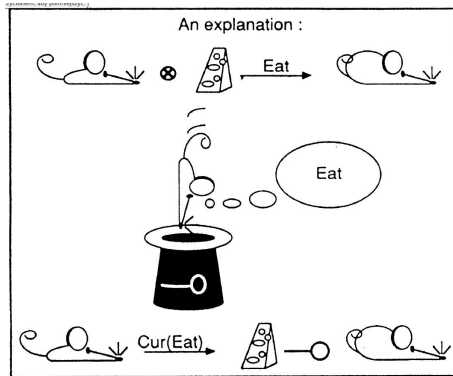
$$\frac{\Sigma, \alpha, \beta \vdash \rho, \Pi}{\Sigma, \alpha \otimes \beta \vdash \rho, \Pi} (L\otimes) \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Pi \quad \Delta \vdash \beta, \Sigma}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \otimes \beta, \Pi, \Sigma} (R\otimes)$$

41



42

Zagadka Lafonta



43

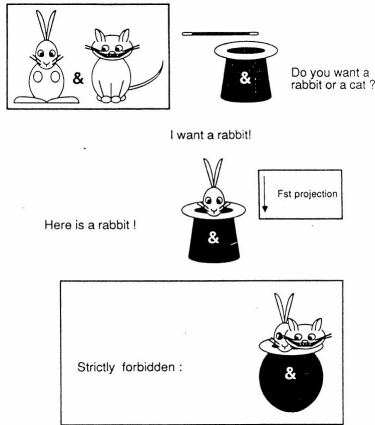
With (wraz)

An object of type  $\alpha \& \beta$  is a "virtual" pair of objects (one of type  $\alpha$ , the other of type  $\beta$ ), from which exactly one can be potentially created from the same resources. In other words,  $\alpha \& \beta$  is a "right of choice" between  $\alpha$  or  $\beta$ . This right belongs to the consumer.

$$\frac{\Sigma, \alpha \vdash \rho, \Pi}{\Sigma, \alpha \& \beta \vdash \rho, \Pi} (L\&) \quad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Pi \quad \Gamma \vdash \beta, \Pi}{\Gamma \vdash \alpha \& \beta, \Pi} (R\&)$$

44

With (wraz)



45

Równoważność

$$\alpha \multimap \beta := (\alpha \multimap \beta) \& (\beta \multimap \alpha)$$

Fakt:  $\Gamma \vdash \alpha \multimap \beta$  wtw, gdy  $\Gamma \vdash \alpha \multimap \beta$  oraz  $\Gamma \vdash \beta \multimap \alpha$ .

46

Negacja i dualność

Negation:

Linear negation  $\alpha^\perp$  is the dual type of  $\alpha$ . Producing data of type  $\alpha$  is the same as consuming data of type  $\alpha^\perp$ .

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma}{\Gamma, \varphi^\perp \vdash \Sigma} (L^\perp) \quad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi^\perp, \Sigma} (R^\perp)$$

Note: Implications  $\alpha \multimap \beta$  and  $\beta^\perp \multimap \alpha^\perp$  are equivalent. (Analogy with electric current.)

47

Plus: An object of type  $\alpha \oplus \beta$  is a pair consisting of an object of type  $\alpha$  or of type  $\beta$ , and a flag showing which case actually holds. The right of choice between  $\alpha$  or  $\beta$  belongs to the producer. The consumer opens a box and uses the contents according to the instruction on the flag.

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma \quad \Gamma, \psi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \oplus \psi \vdash \Sigma} (L\oplus) \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi_i, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi_1 \oplus \varphi_2, \Sigma} (R\oplus)$$

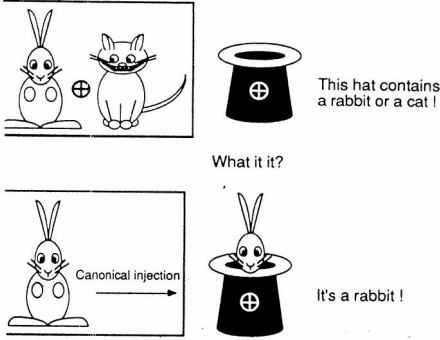
Duality: Plus ( $\oplus$ ) is the other side of With ( $\&$ ):

$$(\alpha \oplus \beta)^\perp \multimap \alpha^\perp \& \beta^\perp$$

$$(\alpha \& \beta)^\perp \multimap \alpha^\perp \oplus \beta^\perp$$

(Receiving a surprise is sending the right of choice.)

48



- ▶  $(\alpha \multimap \beta)^\perp \multimap (\alpha \otimes \beta^\perp)$ ;
- ▶  $(\alpha \otimes \beta \multimap \gamma) \multimap (\alpha \multimap \beta \multimap \gamma)$ ;
- ▶  $(\alpha \multimap \beta) \& (\alpha \multimap \gamma) \multimap (\alpha \multimap \beta \& \gamma)$ ;
- ▶  $(\alpha \multimap \gamma) \& (\beta \multimap \gamma) \multimap (\alpha \oplus \beta \multimap \gamma)$ ;
- ▶  $\alpha \otimes (\beta \oplus \gamma) \multimap (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)$ ;
- ▶  $(\alpha \& \beta)^\perp \multimap \alpha^\perp \oplus \beta^\perp$ ;
- ▶  $(\alpha \oplus \beta)^\perp \multimap \alpha^\perp \& \beta^\perp$ .

- ▶  $\nexists \alpha \multimap \beta \multimap \alpha$ ;
- ▶  $\nexists (\alpha \multimap \beta \multimap \gamma) \multimap (\alpha \multimap \beta) \multimap \alpha \multimap \gamma$ ;
- ▶  $\nexists \alpha \oplus (\beta \otimes \gamma) \multimap (\alpha \oplus \beta) \otimes (\alpha \oplus \gamma)$

- ▶  $(\alpha \multimap \beta) \oplus (\alpha \multimap \gamma) \multimap (\alpha \multimap \beta \oplus \gamma)$ ;
- ▶  $(\alpha \& \beta) \oplus (\alpha \& \gamma) \multimap \alpha \& (\beta \oplus \gamma)$ ;
- ▶  $\alpha \oplus (\beta \& \gamma) \multimap (\alpha \oplus \beta) \& (\alpha \oplus \gamma)$ ;
- ▶  $\alpha \otimes (\beta \& \gamma) \multimap (\alpha \otimes \beta) \& (\alpha \otimes \gamma)$ .

**Of course:** Type  $! \alpha$  represents the ability to create *any required* amount of data of type  $\alpha$ .  
(Consumer of  $! \alpha$  makes the decision.)

**Maybe:** An object of type  $? \alpha$  is the ability to consume a *certain* amount of data of type  $\alpha$ .  
(Producer of  $? \alpha$  makes the decision.)

**Duality:**  $(! \alpha)^\perp \multimap ?(\alpha^\perp)$  and  $(? \alpha)^\perp \multimap !( \alpha^\perp)$

Przykład obiadowy 2020

$$15 \text{ zł} \multimap (\text{pomidorowa} \& \text{krupnik}) \otimes (\text{kotlet} \& \text{ryba}) \otimes (!\text{ziemniaki} \& !\text{ryż}) \otimes (\text{kompot} \oplus \text{jabłko})$$

Przykład obiadowy 2022

$$25 \text{ zł} \multimap (\text{pomidorowa} \& \text{krupnik}) \otimes (\text{kotlet} \& \text{ryba}) \otimes (!\text{ziemniaki} \& !\text{ryż}) \otimes (\text{kompot} \oplus \text{jabłko})$$