Logika i teoria typów

Wykład 13

25 stycznia 2021

Homotopijna teoria typów

(Apetajzer)

Równość w teorii typów

- Konwersja $x =_{\beta\delta} y$ (judgmental/definitional equality);

Równość w teorii typów

- Konwersja $x =_{\beta\delta} y$ (judgmental/definitional equality);
- Definiowalna formułą, np. równość Leibniza, ekstensjonalna równość strumieni, itp.

Równość w teorii typów

- Konwersja $x =_{\beta\delta} y$ (judgmental/definitional equality);
- Definiowalna formułą, np. równość Leibniza, ekstensjonalna równość strumieni, itp.
- Propositional equality: predykat indukcyjny $x =_A y$ z jednym konstruktorem $\mathit{refl}_A(x) : x =_A x$.

Równość w teorii typów

- Konwersja $x =_{\beta\delta} y$ (judgmental/definitional equality);
- Definiowalna formułą, np. równość Leibniza, ekstensjonalna równość strumieni, itp.
- Propositional equality: predykat indukcyjny $x =_A y$ z jednym konstruktorem $\mathit{refl}_A(x) : x =_A x$.

Ściślej: to jest rodzina predykatów indukcyjnych

$$eq(A)(x) : A \to *, \text{ dla dowolnego } x : A$$

Indukcja

Dla liczb naturalnych:

Niech $C : \textbf{int} \to \mathcal{U}$ oraz
$c_0 : C(0), \quad c_1 : (x : \textbf{int}) \to C(x) \to C(s\,x)$.

To wyznacza taką funkcję $f : (y : \textbf{int}) \to C(y)$,
że $f(0) = c_0$, oraz $f(s\,x) = c_1\,x\,(f\,x)$, dla $x : \textbf{int}$.

Indukcja

Dla liczb naturalnych:

Niech $C : \mathbf{int} \to \mathcal{U}$ oraz
$c_0 : C(0), \quad c_1 : (x : \mathbf{int}) \to C(x) \to C(s\,x)$.

To wyznacza taką funkcję $f : (y : \mathbf{int}) \to C(y)$,
że $f(0) = c_0$, oraz $f(s\,x) = c_1\,x\,(f\,x)$, dla $x : \mathbf{int}$.

Dla równości:

Niech $C(x) : (y : A) \to (x =_A y) \to \mathcal{U}$, oraz
$c(x) : C(x, x, \mathit{refl}_A(x))$.

To wyznacza taką funkcję
$f(x) : (y : A) \to (p : x =_A y) \to C(x, y, p)$,
że $f(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x)$, dla $x : A$.

Propositional equality in Coq

parametry *typ indeksu*

↓ ↓ ↓

```
Inductive eq (A : Type) (x : A) : A -> Prop :=
    eq_refl : x = x

eq_ind
     : forall (A : Type) (x : A) (P : A -> Prop),
       P x -> forall y : A, x = y -> P y

eq_rec
     : forall (A : Type) (x : A) (P : A -> Set),
       P x -> forall y : A, x = y -> P y
```

Indukcja dla równości (path induction)

Niech $C(x) : (y : A) \to (x =_A y) \to \mathcal{U}$, oraz $c(x) : C(x, x, \mathit{refl}_A(x))$.

To wyznacza taką funkcję $f(x) : (y : A) \to (p : x =_A y) \to C(x, y, p)$, że $f(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x)$, dla $x : A$.

Indukcja dla równości (path induction)

Niech $C(x) : (y : A) \to (x =_A y) \to \mathcal{U}$, oraz
$c(x) : C(x, x, \mathit{refl}_A(x))$.

To wyznacza taką funkcję
$f(x) : (y : A) \to (p : x =_A y) \to C(x, y, p)$,
że $f(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x)$, dla $x : A$.

Sens moralny: Każdy element typu $x =_A y$ ma te same własności, co $\mathit{refl}_A(x) : x =_A x$.

Uwaga:

This does not prove that any $p : x =_A y$ equals $\mathit{refl}_A(x)$.
(Nawet typy $x =_A y$ i $x =_A x$ są różne, gdy $x \neq_{\beta\delta} y$.)

Indukcja dla równości (path induction)

Fakt: *Jeśli* $F : A \to B$, *oraz* $x =_A y$, *to* $Fx =_B Fy$.

Dowód: Bierzemy $C(x) : (y : A) \to (x =_A y) \to \mathbf{Prop}$
określone tak: $C(x, y, p) = (Fx =_B Fy)$,
oraz

$c(x) = \mathit{refl}_B(Fx) : C(x, x, \mathit{refl}_A(x))$.

To wyznacza $f(x) : (y : A) \to (p : x =_A y) \to C(x, y, p)$,
i wtedy $f(x, y, p) : Fx =_B Fy$.

Przy tym $f(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x) = \mathit{refl}_B(Fx)$.

∘

Interpretacja topologiczna

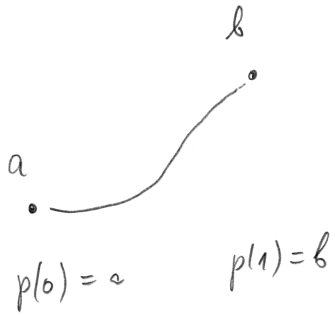
Typy to przestrzenie topologiczne.

Interpretacja topologiczna

Typy to przestrzenie topologiczne.

(Ozn. $\mathbb{I} = [0, 1]$.)

Obiekt $p : a =_A b$ to *droga* od a do b w przestrzeni A, czyli taka funkcja ciągła $p : \mathbb{I} \to A$, że $p(0) = a$, $p(1) = b$.



Równość jest kongruencją

Fakt 1: *Jeśli* $F : A \to B$, *oraz* $x =_A y$, *to* $Fx =_B Fy$.

Dowód kolokwialny:

Skoro teza zachodzi dla $(x, x, \mathit{refl}_A(x))$,
to zachodzi dla dowolnej trójki (x, y, p).

Interpretacja topologiczna:

Funkcja ciągła przeprowadza drogę w drogę.

Droga powrotna

Fakt 1: *Jeśli* $x =_A y$*, to* $y =_A x$*. Ściślej: istnieje funkcja* $\lambda p.\, p^{-1} : (x =_A y) \to (y =_A x)$.

Droga powrotna

Fakt 1: *Jeśli* $x =_A y$*, to* $y =_A x$*. Ściślej: istnieje funkcja*
$\lambda p.\, p^{-1} : (x =_A y) \to (y =_A x)$.

Dowód: Niech $C(x, y, p) = (y =_A x)$ i niech
$c(x) = \mathit{refl}_A(x) : C(x, x, \mathit{refl}_A(x))$.

To określa taką funkcję
$f(x) : (y : A) \to (p : x =_A y) \to (y =_A x)$,

że $f(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x) = \mathit{refl}_A(x)$.

Czyli jeśli $p : x =_A y$, to $p^{-1} = f(x, y, p)$.

Droga powrotna

Fakt 1: *Jeśli* $x =_A y$, *to* $y =_A x$. *Ściślej: istnieje funkcja*
$\lambda p.\, p^{-1} : (x =_A y) \to (y =_A x)$.

Dowód: Niech $C(x, y, p) = (y =_A x)$ i niech
$c(x) = \mathit{refl}_A(x) : C(x, x, \mathit{refl}_A(x))$.

To określa taką funkcję
$f(x) : (y : A) \to (p : x =_A y) \to (y =_A x)$,

że $f(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x) = \mathit{refl}_A(x)$.

Czyli jeśli $p : x =_A y$, to $p^{-1} = f(x, y, p)$.

Uwaga: z tego wynika, że $(\mathit{refl}_A(x))^{-1} = \mathit{refl}_A(x)$.

Składanie dróg

Fakt 2: *Jeśli* $p : x =_A y$ *oraz* $q : y =_A z$, *to* $p \cdot q : x =_A z$.
Na dodatek, $p \cdot p^{-1} = \mathit{refl}_A(x)$.

Składanie dróg

Fakt 2: *Jeśli* $p : x =_A y$ *oraz* $q : y =_A z$, *to* $p \cdot q : x =_A z$. *Na dodatek,* $p \cdot p^{-1} = \mathit{refl}_A(x)$.

Dowód: Niech $C(x, y, p) = \Pi_{z:A} \Pi_{q:y=_A z}(x =_A z)$, czyli $C(x, y, p) = (z : A) \to (q : y =_A z) \to (x =_A z)$.

Potrzebujemy $c(x) : \Pi_{z:A} \Pi_{q:x=_A z}(x =_A z)$, czyli $c(x) : (z : A) \to (q : x =_A z) \to (x =_A z)$.

Składanie dróg

Fakt 2: *Jeśli* $p : x =_A y$ *oraz* $q : y =_A z$, *to* $p \cdot q : x =_A z$. *Na dodatek,* $p \cdot p^{-1} = \mathit{refl}_A(x)$.

Dowód: Niech $C(x, y, p) = \Pi_{z:A}\Pi_{q:y=_A z}(x =_A z)$, czyli $C(x, y, p) = (z : A) \to (q : y =_A z) \to (x =_A z)$.

Potrzebujemy $c(x) : \Pi_{z:A}\Pi_{q:x=_A z}(x =_A z)$, czyli $c(x) : (z : A) \to (q : x =_A z) \to (x =_A z)$.

Najprościej $c(x, z, q) = q$. Wtedy $c(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = \mathit{refl}_A(x)$.

Indukcyjnie definiujemy taką funkcję $f(x)$ typu

$(y : A)\to(p : x =_A y)\to(z : A)\to(q : y =_A z)\to(x =_A z)$,

że $f(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x) : (z : A)\to(q : y =_A z)\to(x =_A z)$

Wtedy $p \cdot q := f(x, y, p, z, q)$.

○

Składanie dróg

Fakt 2: *Jeśli* $p : x =_A y$ *oraz* $q : y =_A z$, *to* $p \cdot q : x =_A z$. *Na dodatek,* $p \cdot p^{-1} = \mathit{refl}_A(x)$.

Składanie dróg

Fakt 2: *Jeśli* $p : x =_A y$ *oraz* $q : y =_A z$, *to* $p \cdot q : x =_A z$.
Na dodatek, $p \cdot p^{-1} = \mathit{refl}_A(x)$.

Dowód: Już mamy operację $p \cdot q = f(x, y, p, z, q)$, gdzie

$f(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x) : (z : A) \to (q : y =_A z) \to (x =_A z)$,

Składanie dróg

Fakt 2: *Jeśli* $p : x =_A y$ *oraz* $q : y =_A z$, *to* $p \cdot q : x =_A z$. *Na dodatek,* $p \cdot p^{-1} = \mathit{refl}_A(x)$.

Dowód: Już mamy operację $p \cdot q = f(x, y, p, z, q)$, gdzie

$f(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x) : (z : A) \to (q : y =_A z) \to (x =_A z)$,

czyli

$f(x, x, \mathit{refl}_A(x), x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = \mathit{refl}_A(x)$.

Składanie dróg

Fakt 2: *Jeśli* $p : x =_A y$ *oraz* $q : y =_A z$, *to* $p \cdot q : x =_A z$. *Na dodatek,* $p \cdot p^{-1} = \mathit{refl}_A(x)$.

Dowód: Już mamy operację $p \cdot q = f(x, y, p, z, q)$, gdzie

$$f(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x) : (z : A) \to (q : y =_A z) \to (x =_A z),$$

czyli

$$f(x, x, \mathit{refl}_A(x), x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = \mathit{refl}_A(x).$$

A zatem:

$\mathit{refl}_A(x) \cdot \mathit{refl}_A(x)^{-1} = f(x, x, \mathit{refl}_A(x), x, \mathit{refl}_A(x)^{-1}) =$
$f(x, x, \mathit{refl}_A(x), x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = \mathit{refl}_A(x)$.

Składanie dróg

Fakt 2: *Jeśli* $p : x =_A y$ *oraz* $q : y =_A z$, *to* $p \cdot q : x =_A z$. *Na dodatek,* $p \cdot p^{-1} = \mathit{refl}_A(x)$.

Dowód: Już mamy operację $p \cdot q = f(x, y, p, z, q)$, gdzie

$f(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x) : (z : A) \to (q : y =_A z) \to (x =_A z)$,

czyli

$f(x, x, \mathit{refl}_A(x), x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = \mathit{refl}_A(x)$.

A zatem:
$\mathit{refl}_A(x) \cdot \mathit{refl}_A(x)^{-1} = f(x, x, \mathit{refl}_A(x), x, \mathit{refl}_A(x)^{-1}) =$
$f(x, x, \mathit{refl}_A(x), x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = \mathit{refl}_A(x)$.

Równość $p \cdot p^{-1} = \mathit{refl}_A(x)$ udowodnimy...

Składanie dróg

Fakt 2: *Jeśli* $p : x =_A y$ *oraz* $q : y =_A z$, *to* $p \cdot q : x =_A z$. *Na dodatek,* $p \cdot p^{-1} = \mathit{refl}_A(x)$.

Dowód: Już mamy operację $p \cdot q = f(x, y, p, z, q)$, gdzie

$$f(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x) : (z : A) \to (q : y =_A z) \to (x =_A z),$$

czyli

$$f(x, x, \mathit{refl}_A(x), x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = \mathit{refl}_A(x).$$

A zatem:
$\mathit{refl}_A(x) \cdot \mathit{refl}_A(x)^{-1} = f(x, x, \mathit{refl}_A(x), x, \mathit{refl}_A(x)^{-1}) =$
$f(x, x, \mathit{refl}_A(x), x, \mathit{refl}_A(x)) = c(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = \mathit{refl}_A(x)$.

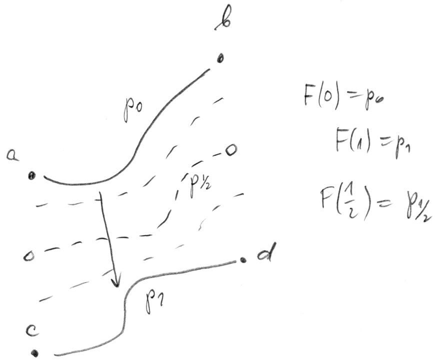
Równość $p \cdot p^{-1} = \mathit{refl}_A(x)$ udowodnimy… przez indukcję, biorąc $C(x, y, p) = (p \cdot p^{-1} = \mathit{refl}_A(x))$.

Uwaga: tutaj C zależy od p.

Interpretacja topologiczna

Równość między drogami $p : a =_A b$, $p' : c =_A d$, to droga w przestrzeni $x =_A y$, czyli taka funkcja ciągła $\phi : \mathbb{I} \to x =_A y$, że $\phi(0) = p$, $\phi(1) = p'$.

To pojęcie można uogólnić na dowolne funkcje.



Homotopia

Niech $f, g : A \to B$ to funkcje ciągłe.

Homotopia od f do g, to taka funkcja ciągła

$$\Phi : \mathbb{I} \times A \to B,$$

że dla dowolnego $x \in A$ zachodzi

$$\Phi(0, x) = f(x) \quad \text{i} \quad \Phi(1, x) = g(x)$$

∘

Równość jako homotopia

- Każdy element typu $a =_A b$ ma te same własności, co $\mathit{refl}_A(x) : a =_A a$.

Równość jako homotopia

- Każdy element typu $a =_A b$ ma te same własności, co $\mathit{refl}_A(x) : a =_A a$.
- Bo każda droga od a do b jest homotopijna (w przestrzeni A) z trywialną pętlą od a do a.

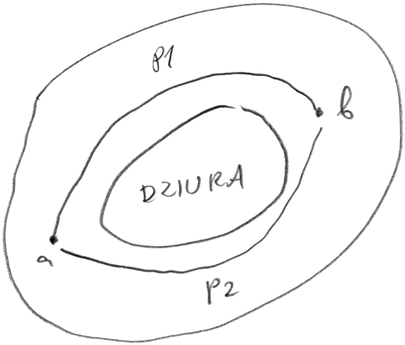
Równość jako homotopia

- Każdy element typu $a =_A b$ ma te same własności, co $refl_A(x) : a =_A a$.
- Bo każda droga od a do b jest homotopijna (w przestrzeni A) z trywialną pętlą od a do a.
- Ale nie każde dwa elementy typu $a =_A b$ są równe.

Równość jako homotopia

- Każdy element typu $a =_A b$ ma te same własności, co $\mathit{refl}_A(x) : a =_A a$.
- Bo każda droga od a do b jest homotopijna (w przestrzeni A) z trywialną pętlą od a do a.
- Ale nie każde dwa elementy typu $a =_A b$ są równe.
- Bo w przestrzeni dróg od a do b może nie być takiej homotopii.

Te drogi nie są homotopijne



Hierarchy of equality types

Fakt 3: *Jeśli* $A : \mathcal{U}_i$ *oraz* $x =_A y$, *to*

$$(x =_A x) =_{\mathcal{U}_i} (y =_A y).$$

Hierarchy of equality types

Fakt 3: *Jeśli* $A : \mathcal{U}_i$ *oraz* $x =_A y$, *to*

$$(x =_A x) =_{\mathcal{U}_i} (y =_A y).$$

Dowód: Indukcja.

$C(x) : (y : A) \to (p : x =_A y) \to \mathcal{U}_{i+1}$.
$C(x, y, p) = ((x =_A x) =_{\mathcal{U}_i} (y =_A y))$.
$c(x) = ((x =_A x) =_{\mathcal{U}_i} (x =_A x))$.

Hierarchy of equality types

Fakt 3: *Jeśli* $A : \mathcal{U}_i$ *oraz* $x =_A y$, *to*

$$(x =_A x) =_{\mathcal{U}_i} (y =_A y).$$

Dowód: Indukcja.

$C(x) : (y : A) \to (p : x =_A y) \to \mathcal{U}_{i+1}$.
$C(x, y, p) = ((x =_A x) =_{\mathcal{U}_i} (y =_A y))$.
$c(x) = ((x =_A x) =_{\mathcal{U}_i} (x =_A x))$.

Uwaga: Dla $x, y : A : \mathcal{U}_i$ jest $(x =_A x) : \mathcal{U}_i$, a równość $(x =_A x) =_{\mathcal{U}_i} (y =_A y)$ jest w $\mathcal{U}_{i+1}$. Dowód używa rodziny $C(x, y, p) = ((x =_A x) =_{\mathcal{U}_i} (y =_A y))$, która jest w $\mathcal{U}_{i+1}$.

◦

Czego się nie da udowodnić przez indukcję?

Pytanie 1: Skoro każda równość to tak naprawdę $\mathit{refl}_A(x)$, to czy z założenia $p : x =_A y$ wynika $p = \mathit{refl}_A(x)$?

Czego się nie da udowodnić przez indukcję?

Pytanie 1: Skoro każda równość to tak naprawdę $refl_A(x)$, to czy z założenia $p : x =_A y$ wynika $p = refl_A(x)$?

Odpowiedź: Nie, bo p ma typ $x =_A y$, a $refl_A(x)$ ma typ $x =_A x$. Równość $p = refl_A(x)$ w ogóle nie ma sensu.

Czego się nie da udowodnić przez indukcję?

Pytanie 1: Skoro każda równość to tak naprawdę $\mathit{refl}_A(x)$, to czy z założenia $p : x =_A y$ wynika $p = \mathit{refl}_A(x)$?

Odpowiedź: Nie, bo p ma typ $x =_A y$, a $\mathit{refl}_A(x)$ ma typ $x =_A x$. Równość $p = \mathit{refl}_A(x)$ w ogóle nie ma sensu.

Pytanie 2: Czy z założenia $p : x =_A x$ wynika

$$p =_{\mathsf{id_A(x,x)}} \mathit{refl}_A(x)?$$

Czego się nie da udowodnić przez indukcję?

Pytanie 1: Skoro każda równość to tak naprawdę $\mathit{refl}_A(x)$, to czy z założenia $p : x =_A y$ wynika $p = \mathit{refl}_A(x)$?

Odpowiedź: Nie, bo p ma typ $x =_A y$, a $\mathit{refl}_A(x)$ ma typ $x =_A x$. Równość $p = \mathit{refl}_A(x)$ w ogóle nie ma sensu.

Pytanie 2: Czy z założenia $p : x =_A x$ wynika

$$p =_{\mathrm{id_A(x,x)}} \mathit{refl}_A(x)?$$

Nie, bo nie umiemy określić tezy indukcyjnej, tj. rodziny

$$C(x) : (y : A) \to (x =_A y) \to \mathcal{U},$$

żeby $C(x, x, \mathit{refl}_A(x)) = (\mathit{refl}_A(x) =_{\mathrm{id_A(x,x)}} \mathit{refl}_A(x))$

Czego się nie da udowodnić przez indukcję?

Pytanie 1: Skoro każda równość to tak naprawdę $refl_A(x)$, to czy z założenia $p : x =_A y$ wynika $p = refl_A(x)$?

Odpowiedź: Nie, bo p ma typ $x =_A y$, a $refl_A(x)$ ma typ $x =_A x$. Równość $p = refl_A(x)$ w ogóle nie ma sensu.

Pytanie 2: Czy z założenia $p : x =_A x$ wynika

$$p =_{\mathrm{id}_A(x,x)} refl_A(x)?$$

Nie, bo nie umiemy określić tezy indukcyjnej, tj. rodziny

$$C(x) : (y : A) \to (x =_A y) \to \mathcal{U},$$

żeby $C(x, x, refl_A(x)) = (refl_A(x) =_{\mathrm{id}_A(x,x)} refl_A(x))$

Bo tak $C(x, y, p) = (p =_{??} refl_A(x))$ się nie da.

Dlaczego. . .

. . . z tego, że $p : x =_A x$ nie wynika $p = \mathit{refl}_A(x)$?

Dlaczego. . .

. . . z tego, że $p : x =_A x$ nie wynika $p = \mathit{refl}_A(x)$?

Odpowiedź topologiczna już była: bo nie każda pętla zwinie się do trywialnej, jeśli trzymamy końce.

Dlaczego…

…z tego, że $p : x =_A x$ nie wynika $p = \mathit{refl}_A(x)$?

Odpowiedź topologiczna już była: bo nie każda pętla zwinie się do trywialnej, jeśli trzymamy końce.

Odpowiedź teoriotypowa: bo to nie *typ* $x =_A x$ jest indukcyjny, ale *rodzina* $\Pi_{y:A}\, x =_A y$.

Inaczej: indukcja musi być jednostajna ze względu na y.

∘

Fibracja (rozwłóknienie)

Przestrzeń topologiczna to kategoria, gdzie morfizmy to drogi.

Fibracja (rozwłóknienie)

Przestrzeń topologiczna to kategoria, gdzie morfizmy to drogi.

Fibracja to funktor $\pi : E \to B$ o takiej własności:

Dla dowolnego $e \in E$:

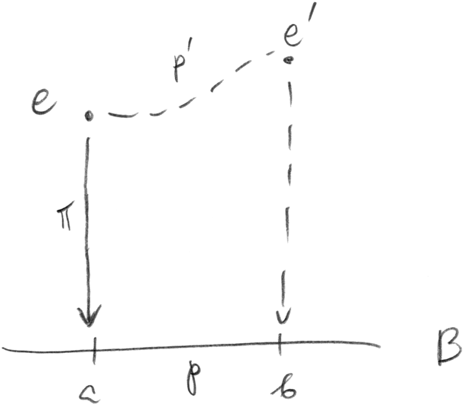
jeśli $\pi(e) = a$ oraz w przestrzeni B jest droga p od a do b,

to istnieją $e' \in E$ i taka droga p' od e do e', że $\pi(p') = p$

Przestrzeń E to „przestrzeń całkowita (totalna)”,
a B to „przestrzeń bazowa”.

∘

Fibracja



Transport, czyli równość Leibniza

Fakt 2: *Jeśli* $F : A \to B$, *oraz* $p : x =_A y$, *to istnieje funkcja* $p^* : Fx \to Fy$.

Dowód: Niech $C(x, y, p) := (Fx \to Fy)$ oraz $c(x, refl_A(x)) := \mathrm{id} : Fx \to Fx$. Wtedy
$c(x, refl_A(x)) : C(x, x, refl_A(x))$,
więc przez indukcję dostajemy $f(x, y, p) : Fx \to Fy$.

Uwaga: $refl_A(x)^* = \mathrm{id}$

Typ zależny to fibracja

Rodzina typów (typ zależny) $P : B \to \mathcal{U}$ przypisuje każdemu obiektowi $x : B$ pewien typ $P(x)$. Przestrzeń całkowita, to koprodukt $E = \Sigma_{x:B} P(x)$ czyli $E = (x : B) \times P(x)$. Funktor $\pi : E \to B$, to pierwsze rzutowanie: $\pi[x, u] = x$.

Jeśli $p : x =_B y$, to $p_* : P(x) \to P(y)$. Wtedy $[x, u] =_E [y, p_*(u)]$.

Typ zależny to fibracja

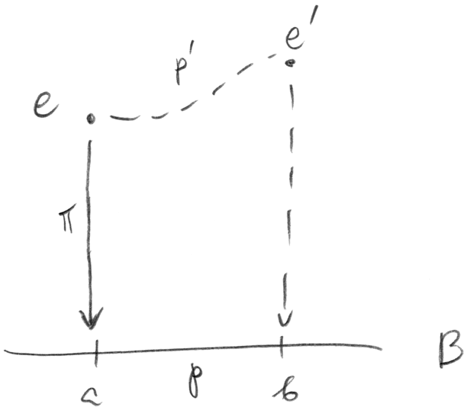
Rodzina typów (typ zależny) $P : B \to \mathcal{U}$ przypisuje każdemu obiektowi $x : B$ pewien typ $P(x)$. Przestrzeń całkowita, to koprodukt $E = \Sigma_{x:B} P(x)$ czyli $E = (x : B) \times P(x)$. Funktor $\pi : E \to B$, to pierwsze rzutowanie: $\pi[x, u] = x$.

Jeśli $p : x =_B y$, to $p_* : P(x) \to P(y)$.
Wtedy $[x, u] =_E [y, p_*(u)]$.

Dowód: Można stosować indukcję do rodziny
$C(x, y, p) = ([x, u] =_E [y, p_*(u)])$,
ponieważ $[x, u] =_E [x, u] = [x, refl_A(x)^*(u)]$

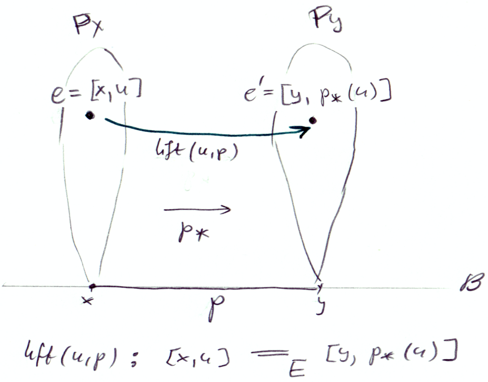
$\circ$

Fibracja



Typ zależny to fibracja

Jeśli $p : x =_B y$, to $p_* : P(x) \to P(y)$.
Wtedy : $[x, u] =_E [y, p_*(u)]$.



Homotopia

Homotopia to ekstensjonalna równość funkcji (z A do B):

$H : f \sim g$ to funkcja $H : (a : A) \to f(a) =_B g(a)$.

Interpretacja: Jeśli drogę $p : f(a) =_B f(b)$ uważamy za funkcję $p : [0,1] \to B$, to homotopia jest funkcją $H : A \to [0,1] \to B$.

A to jest moralnie to samo, co $H : [0,1] \to (A \to B)$.

Równoważność?

Jak zdefiniować równoważność (izomorfizm) dla typów?

Równoważność?

Jak zdefiniować równoważność (izomorfizm) dla typów?

Pierwsza próba: funkcja $f : A \to B$ powinna mieć funkcję obustronnie odwrotną. Czyli ten typ powinien być niepusty:

$$qinv(f) := \Sigma_{g:B\to A}[(f \circ g \sim \mathrm{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathrm{id}_A)]$$

Równoważność?

Jak zdefiniować równoważność (izomorfizm) dla typów?

Pierwsza próba: funkcja $f : A \to B$ powinna mieć funkcję obustronnie odwrotną. Czyli ten typ powinien być niepusty:

$$qinv(f) := \Sigma_{g:B\to A}[(f \circ g \sim \mathrm{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathrm{id}_A)]$$

Wada: Może być więcej niż jeden inhabitant w $qinv(f)$.

∘

Równoważność

Lepszy pomysł: Funkcja $f : A \to B$ jest *równoważnością*, jeśli ma obie funkcje odwrotne:

$$isequiv(f) := \Sigma_{g:B\to A}(f \circ g \sim id_B) \times \Sigma_{h:B\to A}(h \circ f \sim id_A)$$

Równoważność

Lepszy pomysł: Funkcja $f : A \to B$ jest *równoważnością*, jeśli ma obie funkcje odwrotne:

$$isequiv(f) := \Sigma_{g:B\to A}(f \circ g \sim id_B) \times \Sigma_{h:B\to A}(h \circ f \sim id_A)$$

Oznaczenie $A \simeq B := \Sigma_{f:A\to B}\, isequiv(f)$.

∘

Paradoks?

$$qinv(f) :\equiv \Sigma_{g:B\to A}[(f\circ g \sim \mathrm{id}_B) \times (g\circ f \sim \mathrm{id}_A)]$$
$$isequiv(f) :\equiv \Sigma_{g:B\to A}(f\circ g \sim id_B) \times \Sigma_{h:B\to A}(h\circ f \sim id_A)$$

Paradoks?

$$qinv(f) := \Sigma_{g:B\to A}[(f \circ g \sim \mathrm{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathrm{id}_A)]$$

$$isequiv(f) := \Sigma_{g:B\to A}(f \circ g \sim id_B) \times \Sigma_{h:B\to A}(h \circ f \sim id_A)$$

- Warunki $qinv(f)$ oraz $isequiv(f)$ są logicznie równoważne.

Paradoks?

$$qinv(f) := \Sigma_{g:B\to A}[(f \circ g \sim \mathrm{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathrm{id}_A)]$$
$$isequiv(f) := \Sigma_{g:B\to A}(f \circ g \sim id_B) \times \Sigma_{h:B\to A}(h \circ f \sim id_A)$$

- Warunki $qinv(f)$ oraz $isequiv(f)$ są logicznie równoważne.
- Jeśli $e_1, e_2 : isequiv(f)$, to $e_1 =_{isequiv(f)} e_2$.
- Ale jeśli $e_1, e_2 : qinv(f)$ to niekoniecznie $e_1 =_{qinv(f)} e_2$.

Paradoks?

$$qinv(f) := \Sigma_{g:B\to A}[(f \circ g \sim \mathrm{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathrm{id}_A)]$$

$$isequiv(f) := \Sigma_{g:B\to A}(f \circ g \sim id_B) \times \Sigma_{h:B\to A}(h \circ f \sim id_A)$$

- Warunki $qinv(f)$ oraz $isequiv(f)$ są logicznie równoważne.
- Jeśli $e_1, e_2 : isequiv(f)$, to $e_1 =_{isequiv(f)} e_2$.
- Ale jeśli $e_1, e_2 : qinv(f)$ to niekoniecznie $e_1 =_{qinv(f)} e_2$.

Jakim cudem?

Paradoks?

$$qinv(f) := \Sigma_{g:B\to A}[(f \circ g \sim \mathrm{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathrm{id}_A)]$$
$$isequiv(f) := \Sigma_{g:B\to A}(f \circ g \sim id_B) \times \Sigma_{h:B\to A}(h \circ f \sim id_A)$$

Inhabitant $e : qinv(f)$ to trójka (g, P, Q) gdzie $g : B \to A$, oraz $P : f \circ g \sim id_B$ i $Q : g \circ f \sim \mathrm{id}_A$.

Wtedy $e' = (g, P, g, Q) : isequiv(f)$.

Jeśli $e_1 = (g_1, P_1, Q_1)$ i $e_2 = (g_2, P_2, Q_2)$ są różne, to $e_1' = (g_1, P_1, g_1, Q_1)$ i $e_2' = (g_2, P_2, g_2, Q_2)$ są też różne?!

Paradoks?

$$qinv(f) := \Sigma_{g:B\to A}[(f \circ g \sim \mathrm{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathrm{id}_A)]$$

$$isequiv(f) := \Sigma_{g:B\to A}(f \circ g \sim id_B) \times \Sigma_{h:B\to A}(h \circ f \sim id_A)$$

Paradoks?

$$qinv(f) := \Sigma_{g:B\to A}[(f\circ g \sim \mathrm{id}_B)\times(g\circ f\sim \mathrm{id}_A)]$$
$$isequiv(f) := \Sigma_{g:B\to A}(f\circ g\sim id_B)\times\Sigma_{h:B\to A}(h\circ f\sim id_A)$$

Mamy $e_1 = (g_1, P_1, Q_1)$ i $e_2 = (g_2, P_2, Q_2)$ typu $qinv(f)$.

Paradoks?

$$qinv(f) := \Sigma_{g:B\to A}[(f \circ g \sim \mathrm{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathrm{id}_A)]$$
$$isequiv(f) := \Sigma_{g:B\to A}(f \circ g \sim id_B) \times \Sigma_{h:B\to A}(h \circ f \sim id_A)$$

Mamy $e_1 = (g_1, P_1, Q_1)$ i $e_2 = (g_2, P_2, Q_2)$ typu $qinv(f)$.

Wtedy $e_1' = (g_1, P_1, g_1, Q_1)$ i $e_2' = (g_2, P_2, g_2, Q_2)$

są typu $isequiv(f)$ i są równe

Paradoks?

$$qinv(f) := \Sigma_{g:B\to A}[(f \circ g \sim \mathrm{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathrm{id}_A)]$$
$$isequiv(f) := \Sigma_{g:B\to A}(f \circ g \sim id_B) \times \Sigma_{h:B\to A}(h \circ f \sim id_A)$$

Mamy $e_1 = (g_1, P_1, Q_1)$ i $e_2 = (g_2, P_2, Q_2)$ typu $qinv(f)$.

Wtedy $e_1' = (g_1, P_1, g_1, Q_1)$ i $e_2' = (g_2, P_2, g_2, Q_2)$

są typu $isequiv(f)$ i są równe w typie $isequiv(f)$.

Paradoks?

$$qinv(f) := \Sigma_{g:B\to A}[(f \circ g \sim \mathrm{id}_B) \times (g \circ f \sim \mathrm{id}_A)]$$
$$isequiv(f) := \Sigma_{g:B\to A}(f \circ g \sim id_B) \times \Sigma_{h:B\to A}(h \circ f \sim id_A)$$

Mamy $e_1 = (g_1, P_1, Q_1)$ i $e_2 = (g_2, P_2, Q_2)$ typu $qinv(f)$.

Wtedy $e_1' = (g_1, P_1, g_1, Q_1)$ i $e_2' = (g_2, P_2, g_2, Q_2)$

są typu $isequiv(f)$ i są równe w typie $isequiv(f)$.

Dowód równości $g_1 = g_2$ użyty dla pierwszej współrzędnej

nie musi być taki sam jak użyty dla trzeciej współrzędnej.

A żeby dostać $e_1 = e_2$ musimy mieć jeden dowód!

Univalent Foundations

Funkcja $f : A \to B$ jest *równoważnością*,
jeśli ma obie funkcje odwrotne:

$$isequiv(f) := \Sigma_{g:B\to A}(f \circ g \sim id_B) \times \Sigma_{h:B\to A}(h \circ f \sim id_A)$$

Oznaczenie $A \simeq B := \Sigma_{f:A\to B}\, isequiv(f)$.

Univalent Foundations

Funkcja $f : A \to B$ jest *równoważnością*,
jeśli ma obie funkcje odwrotne:

$$isequiv(f) :\equiv \Sigma_{g:B\to A}(f \circ g \sim id_B) \times \Sigma_{h:B\to A}(h \circ f \sim id_A)$$

Oznaczenie $A \simeq B :\equiv \Sigma_{f:A\to B}\, isequiv(f)$.

Dwie rzeczy, których nie da się udowodnić:

- Ekstensjonalność dla funkcji: Jeśli $f \sim g$, to $f = g$.
- Równoważność to równość: Jeśli $A \simeq B$, to $A = B$.

Postulujemy te własności jako aksjomaty.

Aksjomat ekstensjonalności

Jeśli $f, g : \Pi_{x:A} B(x)$, to równość $f =_{\Pi_{x:A} B(x)} g$ jest równoważna homotopii między f i g.

Aksjomat ekstensjonalności

Jeśli $f, g : \Pi_{x:A} B(x)$, to równość $f =_{\Pi_{x:A} B(x)} g$ jest równoważna homotopii między f i g.

Ściślej, definiujemy

$\mathsf{happly}_{f,g} : (f =_{\Pi_{x:A} B(x)} g) \to \Pi_{x:A}(f(x) =_{B(x)} g(x))$

przez indukcję i przyjmujemy regułę:

$$\frac{\Gamma \vdash f : \Pi_{x:A} B(x) \qquad \Gamma \vdash g : \Pi_{x:A} B(x)}{\Gamma \vdash \mathsf{funext}(f, g) : \mathit{isequiv}(\mathsf{happly}_{f,g})}$$

∘

Aksjomat uniwalencji (jednowartościowości?)

Równość $A =_{\mathcal{U}} B$ i równoważność

$$A \simeq B = \Sigma_{f:A \to B}\, isequiv(f)$$

są tym samym. Ściślej, są równoważne:

$$(A =_{\mathcal{U}} B) \simeq (A \simeq B).$$

Aksjomat uniwalencji (jednowartościowości?)

Równość $A =_{\mathcal{U}} B$ i równoważność

$$A \simeq B = \Sigma_{f:A\to B}\, isequiv(f)$$

są tym samym. Ściślej, są równoważne:

$$(A =_{\mathcal{U}} B) \simeq (A \simeq B).$$

Definiujemy przez indukcję funkcję

$$\mathrm{idtoeqv}_{A,B} : (A =_{\mathcal{U}} B) \to (A \simeq B)$$

i przyjmujemy regułę:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \qquad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash \mathrm{univalence}_{A,B} : isequiv(\mathrm{idtoeqv}_{A,B})}$$

dla nowej stałej $\mathrm{univalence}_{A,B}$

Pożytek z uniwalencji

Utożsamiamy konstrukcje równoważne, np. typy izomorficzne:

$$(A \times B) \to C = A \to B \to C,$$

Pożytek z uniwalencji

Utożsamiamy konstrukcje równoważne, np. typy izomorficzne:

$$(A \times B) \to C = A \to B \to C,$$

w tym typy indukcyjne *strukturalnie równoważne,*

Pożytek z uniwalencji

Utożsamiamy konstrukcje równoważne, np. typy izomorficzne:

$$(A \times B) \to C = A \to B \to C,$$

w tym typy indukcyjne *strukturalnie równoważne*,

albo izomorficzne struktury algebraiczne.

Pożytek z uniwalencji

Utożsamiamy konstrukcje równoważne, np. typy izomorficzne:

$$(A \times B) \to C = A \to B \to C,$$

w tym typy indukcyjne *strukturalnie równoważne,*

albo izomorficzne struktury algebraiczne.

Przykład: półgrupa to obiekt (A, m, P) typu

$\Sigma_{A:\mathcal{U}}\Sigma_{m:A\to A\to A}\forall_{x,y,z:A}.\ m(x, m(y, z)) =_A m(m(x, y), z)$.

Równoważność półgrup to tyle, co izomorfizm.

Zatem izomorficzne półgrupy są identyczne.

Pożytek z uniwalencji

W języku homotopijnej teorii typów (HoTT) można formalizować konstrukcje matematyczne i dowody w sposób wygodny dla matematyka.

Formalna teoria homotopii dostarcza semantyki dla tego formalizmu.

Metatwierdzenia

- Silna normalizacja.
- Niesprzeczność.
- Rozstrzygalność poprawności osądu $\Gamma \vdash a : A$

∘

Klasyfikacja obiektów

- Typ A jest *zaledwie zdaniem* (mere proposition), gdy dla dowolnych $x, y : A$ zachodzi $x =_A y$. (Proof irrelevance.)

Klasyfikacja obiektów

- Typ A jest *zaledwie zdaniem* (mere proposition), gdy dla dowolnych $x, y : A$ zachodzi $x =_A y$. (Proof irrelevance.)
- Typ A jest *zbiorem*, gdy dla dowolnych $x, y : A$ i dowolnych $p, q : x =_A y$ zachodzi $p =_{x =_A y} q$.

Klasyfikacja obiektów

- Typ A jest *zaledwie zdaniem* (mere proposition), gdy dla dowolnych $x, y : A$ zachodzi $x =_A y$. (Proof irrelevance.)
- Typ A jest *zbiorem*, gdy dla dowolnych $x, y : A$ i dowolnych $p, q : x =_A y$ zachodzi $p =_{x =_A y} q$.
  Ściślej: gdy niepusty jest typ
  $$\mathrm{isSet}(A) := \Pi_{x,y:A} \Pi_{p,q:x=_A y}(p = q)$$

Klasyfikacja obiektów

- Typ A jest *zaledwie zdaniem* (mere proposition), gdy dla dowolnych $x, y : A$ zachodzi $x =_A y$. (Proof irrelevance.)
- Typ A jest *zbiorem*, gdy dla dowolnych $x, y : A$ i dowolnych $p, q : x =_A y$ zachodzi $p =_{x =_A y} q$.
  Ściślej: gdy niepusty jest typ
  $$\mathrm{isSet}(A) := \Pi_{x,y:A} \Pi_{p,q:x=_A y}(p = q)$$
- Typ A jest 1-*typem*, gdy dla dowolnych $x, y : A$, dowolnych $p, q : x =_A y$ i $r, s : p =_{x=_A y} q$ zachodzi $r =_{\dots} s$.

Klasyfikacja obiektów

- Typ A jest *zaledwie zdaniem* (mere proposition), gdy dla dowolnych $x, y : A$ zachodzi $x =_A y$. (Proof irrelevance.)
- Typ A jest *zbiorem*, gdy dla dowolnych $x, y : A$ i dowolnych $p, q : x =_A y$ zachodzi $p =_{x =_A y} q$.
  Ściślej: gdy niepusty jest typ
  $$\mathrm{isSet}(A) := \Pi_{x,y:A}\Pi_{p,q:x=_A y}(p = q)$$
- Typ A jest 1-*typem*, gdy dla dowolnych $x, y : A$, dowolnych $p, q : x =_A y$ i $r, s : p =_{x =_A y} q$ zachodzi $r =_{\dots} s$.
- Dalej mamy 2-typy, 3-typy...

Wyższe typy indukcyjne

Typ składa się nie tylko z elementów,

ale także z równości (dróg) między elementami,

Wyższe typy indukcyjne

Typ składa się nie tylko z elementów,

ale także z równości (dróg) między elementami,

i z równości (homotopii) między drogami,

Wyższe typy indukcyjne

Typ składa się nie tylko z elementów,

ale także z równości (dróg) między elementami,

i z równości (homotopii) między drogami,

i między homotopiami dróg, itd. (wyższy grupoid)

Wyższe typy indukcyjne

Typ składa się nie tylko z elementów,

ale także z równości (dróg) między elementami,

i z równości (homotopii) między drogami,

i między homotopiami dróg, itd. (wyższy grupoid)

Konstruktory typu indukcyjnego mogą (powinny?) definiować

nie tylko *obiekty* ale także *drogi* (dowolnego rzędu).

∘

Przykład 1: iloraz

To w Coqu nie przejdzie:

```
Inductive Quotient (A:Set)(R: A -> Prop) : Set :=
| klasa :  A -> Quotient A R
| tosamo:(a,b:A) -> R a b -> (klasa a = klasa b).
```

∘

Przykład 2: okrąg

```
Inductive Circle : Type :=
| base : Circle
| loop : base = base.
```

Przykład 2: okrąg

```
Inductive Circle : Type :=
| base : Circle
| loop : base = base.
```

Sens: Jeden punkt, ale nieskończenie wiele różnych pętli.

Grupa podstawowa okręgu to $\mathbb{Z}$.

Indukcja dla okręgu

Definiujemy taką funkcję $f : S^1 \to T$, że $f(base) = b : T$ oraz $f(loop) = \ell : b =_T b$.

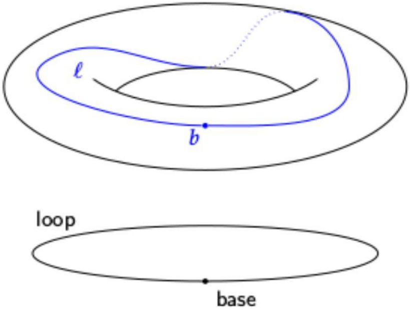


Figure 6.1: The topological induction principle for S^1

Obrazek z *The HoTT Book*, `https://homotopytypetheory.org/book/`

Indukcja dla okręgu, teoriotypowo

Typ $f : (x : S^1) \to P(x)$ jest zależny, więc $b \in P(base)$.

Droga ℓ musi leżeć wewnątrz włókna $P(base)$, ale „ponad” loop.

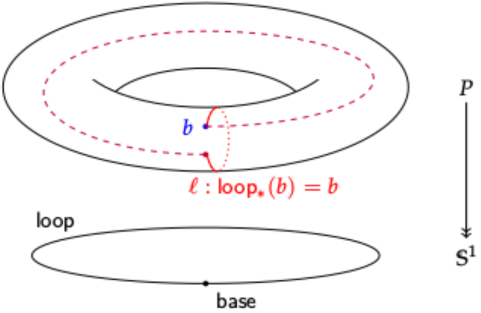


Figure 6.2: The type-theoretic induction principle for $\mathbf{S}^1$

Obrazek z *The HoTT Book*, `https://homotopytypetheory.org/book/`

Przykład 3: torus

```
Inductive Torus : Type :=
| base : Sphere
| tędy, owędy : base = base.
| abel : tędy ∘ owędy = owędy ∘ tędy.
```

Sens: Jeden punkt, dwie permutowalne pętle,

Grupa podstawowa torusa, to $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

∘

Przykład 4: sfera

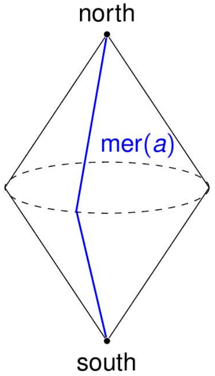
```
Inductive Sphere : Type :=
| base : Sphere
| surf : refl_base =_{base=base} refl_base
```

Sens: Jeden punkt, jedna trywialna pętla, ale nieskończenie wiele różnych homotopii dla tej jednej pętli.

Grupa podstawowa sfery jest trywialna,
ale jej druga grupa homotopii to $\mathbb{Z}$.

Przykład 5: suspension (zawieszenie?)

```
Inductive susp (A:Type) : Type :=
| north : susp A
| south : susp A
| mer : A -> (north = south).
```

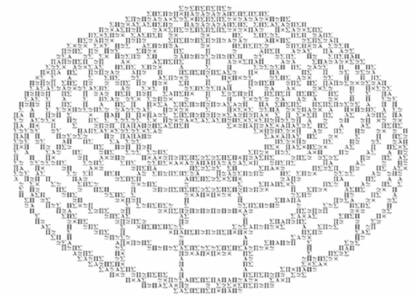


Obrazek z http://home.sandiego.edu/ shulman/hottseminar2012/

Więcej tutaj: https://homotopytypetheory.org/book/

Homotopy Type Theory

Univalent Foundations of Mathematics



The Univalent Foundations Program

Institute for Advanced Study