Logika i teoria typów

Wykład 6

23 listopada 2021

Rachunek lambda?

Czy dla logiki klasycznej można zdefiniować rachunek lambda?

Rachunek lambda?

Czy dla logiki klasycznej można zdefiniować rachunek lambda?

1. Notacja dla dowodów – to łatwe: trzeba tylko wymyślić składnię dla reguły (Cheat).

Rachunek lambda?

Czy dla logiki klasycznej można zdefiniować rachunek lambda?

1. Notacja dla dowodów – to łatwe: trzeba tylko wymyślić składnię dla reguły (Cheat).

2. Ale czy to ma sens obliczeniowy?

Rachunek lambda?

Czy dla logiki klasycznej można zdefiniować rachunek lambda?

1. Notacja dla dowodów – to łatwe: trzeba tylko wymyślić składnię dla reguły (Cheat).

2. Ale czy to ma sens obliczeniowy?

3. A jak wyglądają klasyczne reguły gry?

Bajka Selingera

Bajka Selingera

The evil king calls the poor shepherd and gives him these orders: *"You must bring me the philosopher's stone, or you have to find a way to turn the philosopher's stone into gold. If you don't, your head will be taken off tomorrow!"*
What can the poor shepherd do to save his life?

◦

Bajka Selingera: ciąg dalszy

The next day the poor shepherd brings to the king's palace a huge machine. The machine has two openings.
One is marked *"Put the philosopher's stone here!"*
and the other *"The gold will fall out from here"*.

Bajka Selingera: ciąg dalszy

The next day the poor shepherd brings to the king's palace a huge machine. The machine has two openings.
One is marked *"Put the philosopher's stone here!"*
and the other *"The gold will fall out from here"*.

That will perfectly work as long as the king cannot put the philosopher's stone into the machine.

Bajka Selingera: zakończenie

But what if, somehow, the king comes into the possession of the philosopher's stone?

Bajka Selingera: zakończenie

But what if, somehow, the king comes into the possession of the philosopher's stone?

Then the shepherd's brother, hidden inside the machine, will grab the stone, and hand it discretely to the shepherd. The shepherd now can say: *"Oops, Your Majesty, I've been mistaken. Here is the philosopher's stone!"*.

A little game: $\neg\neg(p \vee \neg p)$

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \bot$?

A little game: $\neg\neg(p \vee \neg p)$

$\forall$: $(p \vee \neg p) \rightarrow \bot \vdash \bot$?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \rightarrow \bot \vdash p \vee \neg p$!

A little game: $\neg\neg(p \vee \neg p)$

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \bot$?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash p \vee \neg p$!
$\forall$: ?

A little game: $\neg\neg(p \vee \neg p)$

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \bot$?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash p \vee \neg p$!
$\forall$: ?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \neg p$!

A little game: $\neg\neg(p \vee \neg p)$

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \bot$?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash p \vee \neg p$!
$\forall$: ?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \neg p$!
$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash \bot$?

A little game: $\neg\neg(p \vee \neg p)$

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \bot$?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash p \vee \neg p$!
$\forall$: ?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \neg p$!
$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash \bot$?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p \vee \neg p$!

A little game: $\neg\neg(p \vee \neg p)$

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \bot$?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash p \vee \neg p$!
$\forall$: ?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \neg p$!
$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash \bot$?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p \vee \neg p$!
$\forall$: ?!

A little game: $\neg\neg(p \vee \neg p)$

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \bot$?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash p \vee \neg p$!
$\forall$: ?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \neg p$!
$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash \bot$?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p \vee \neg p$!
$\forall$: ?!
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p$!

A little cheating: $p \vee \neg p$

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \bot$?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash p \vee \neg p$!
$\forall$: ?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \neg p$!
$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash \bot$?
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p \vee \neg p$!
$\forall$: ?!
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p$!

A little cheating: $p \vee \neg p$

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \bot$?

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash p \vee \neg p$!

$\forall$: ?

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \neg p$!

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash \bot$?

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p \vee \neg p$!

$\forall$: ?!

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p$!

$\exists$: $p \vee \neg p$!

A little cheating: $p \vee \neg p$

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \bot$?

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash p \vee \neg p$!

$\forall$: ?

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \neg p$!

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash \bot$?

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p \vee \neg p$!

$\forall$: ?!

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p$!

$\exists$: $p \vee \neg p$!

$\forall$: ??

A little cheating: $p \vee \neg p$

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \bot$?

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash p \vee \neg p$!

$\forall$: ?

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \neg p$!

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash \bot$?

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p \vee \neg p$!

$\forall$: ?!

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p$!

$\exists$: $p \vee \neg p$!

$\forall$: ??

$\exists$: $\neg p$!

A little cheating: $p \vee \neg p$

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \bot$?

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash p \vee \neg p$!

$\forall$: ?

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \neg p$!

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash \bot$?

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p \vee \neg p$!

$\forall$: ?!

$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p$!

$\exists$: $p \vee \neg p$!

$\forall$: ??

$\exists$: $\neg p$!

$\forall$: $p \vdash \bot$??

A little cheating: $p \vee \neg p$

$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \bot$?	
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash p \vee \neg p$!	$\exists$: $p \vee \neg p$!
$\forall$: ?	$\forall$: ??
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot \vdash \neg p$!	$\exists$: $\neg p$!
$\forall$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash \bot$?	$\forall$: $p \vdash \bot$??
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p \vee \neg p$!	$\exists$: $p \vdash p \vee \neg p$!!
$\forall$: ?!	
$\exists$: $(p \vee \neg p) \to \bot, p \vdash p$!	

Logika klasyczna

$$\frac{\Gamma, a{:}\neg\alpha \vdash M : \bot}{\Gamma \vdash \mu a{:}\neg\alpha.\, M : \alpha}$$

Logika klasyczna

$$\frac{\Gamma, a{:}\neg\alpha \vdash M : \bot}{\Gamma \vdash \mu a{:}\neg\alpha.\, M : \alpha} \qquad\qquad \frac{\Gamma, a{:}\neg\alpha \vdash M : \alpha}{\Gamma, a{:}\neg\alpha \vdash [a]M : \bot}$$

Logika klasyczna

$$\frac{\Gamma, a{:}\neg\alpha \vdash M : \bot}{\Gamma \vdash \mu a{:}\neg\alpha.\, M : \alpha} \qquad\qquad \frac{\Gamma, a{:}\neg\alpha \vdash M : \alpha}{\Gamma, a{:}\neg\alpha \vdash [a]M : \bot}$$

Term $\mu a^{\neg(p\vee\neg p)}.\,[a](\mathrm{in}_2(\lambda z^p.\,[a](\mathrm{in}_1(z))))$ ma typ $p \vee \neg p$.

Logika klasyczna

$$\frac{\Gamma, a{:}\neg\alpha \vdash M : \bot}{\Gamma \vdash \mu a{:}\neg\alpha.\, M : \alpha} \qquad \frac{\Gamma, a{:}\neg\alpha \vdash M : \alpha}{\Gamma, a{:}\neg\alpha \vdash [a]M : \bot}$$

Term $\mu a^{\neg(p\vee\neg p)}.\,[a](\mathrm{in}_2(\lambda z^p.\,[a](\mathrm{in}_1(z))))$ ma typ $p \vee \neg p$.

Jeśli $a \notin \mathrm{FV}(M)$, to zamiast $\mu a{:}\neg\alpha.\, M$ piszemy $\varepsilon_\alpha(M)$.

Sens obliczeniowy

Co można zrobić z dowodem postaci $\mu a^{\neg\alpha} \ldots [a] M^{\alpha} \ldots$?

Sens obliczeniowy

Co można zrobić z dowodem postaci $\mu a^{\neg\alpha} \ldots [a]M^{\alpha} \ldots$?

Wyjąć dowód $M : \alpha$ ze środka, i wyrzucić resztę!

Sens obliczeniowy

Co można zrobić z dowodem postaci $\mu a^{\neg\alpha} \ldots [a] M^{\alpha} \ldots$?

Wyjąć dowód $M : \alpha$ ze środka, i wyrzucić resztę!

Co wyjąć z tego dowodu:

$$\lambda x^{(p \to q) \to p} \mu a^{\neg p}.\, [a](x(\lambda z^{p}.\, \varepsilon_q([a]z)))\,?$$

Sens obliczeniowy

Co można zrobić z dowodem postaci $\mu a^{\neg\alpha} \ldots [a] M^{\alpha} \ldots$?

Wyjąć dowód $M : \alpha$ ze środka, i wyrzucić resztę!

Co wyjąć z tego dowodu:

$$\lambda x^{(p\to q)\to p} \mu a^{\neg p}.\, [a](x(\lambda z^{p}.\, \varepsilon_q([a]z)))\,?$$

Przeszkody: niebieskie $[a]$, czerwone z.

Idziemy w zaparte

Kiedy jest naprawdę ważne, co jest wewnątrz $[a]M$?

Przy ewaluacji wyrażenia $[a]M$ w jakimś kontekście.

Niedospecyfikowane fragmenty termu M mogą wtedy

– okazać się nieistotne;

– zostać dookreślone.

∘

Sens obliczeniowy

$$\mu a^{\neg\alpha}(\ldots [a]M^{\alpha} \ldots) \qquad \Longrightarrow \qquad M^{\alpha} \text{ ?}$$

Sens obliczeniowy

$$\mu a^{\neg\alpha}(\ldots [a]M^{\alpha} \ldots) \qquad \Longrightarrow \qquad M^{\alpha} \text{ ?}$$

$$\mu a^{\neg\alpha} N \qquad \Longrightarrow \qquad N[[a] := \lambda m.\, \mathtt{abort}(m)] \text{ ?}$$

Sens obliczeniowy

$$\mu a^{\neg\alpha}(\ldots [a] M^{\alpha} \ldots) \qquad \Longrightarrow \qquad M^{\alpha} \text{ ?}$$

$$\mu a^{\neg\alpha} N \qquad \Longrightarrow \qquad N[[a] := \lambda m.\, \mathtt{abort}(m)] \text{ ?}$$

Timothy Griffin (1990):

$$E[\mu a^{\neg\alpha} N] \qquad \Longrightarrow \qquad N[[a] := \lambda m.\, \mathtt{abort}(E[m])]$$

∘

Sens obliczeniowy: “sterowanie nielokalne”

$$\mu a.\, M \quad \equiv \quad \texttt{catch}\ a\ \texttt{in}\ M$$

$$[a]M \quad \equiv \quad \texttt{throw}\ M\ \texttt{to}\ [a]$$

Internalizacja Griffina

$$E[\mu a^{\neg\alpha} N] \qquad \Longrightarrow \qquad N[[a] := \lambda m.\, \mathtt{abort}(E[m])]$$

Rachunek $\boldsymbol{\lambda\mu}$ (Michel Parigot[1], 1992):

– Otoczenie E może być „wchłaniane" częściowo.

∘

[1] Nie mylić z rachunkiem μ.

Rachunek $\lambda\mu$: fragment implikacyjny

$$(\beta) \quad (\lambda x^\alpha M)N \;\Rightarrow\; M[x := N].$$

Rachunek $\lambda\mu$: fragment implikacyjny

$$(\beta) \quad (\lambda x^{\alpha} M)N \;\Rightarrow\; M[x := N].$$

$$(\eta_{\mu}) \quad \mu a^{\neg\alpha}.\,[a]M^{\alpha} \;\Rightarrow\; M, \quad \text{gdy } a \notin \mathrm{FV}(M).$$

Rachunek $\lambda\mu$: fragment implikacyjny

$$(\beta)\quad (\lambda x^{\alpha} M)N \;\Rightarrow\; M[x := N].$$

$$(\eta_\mu)\quad \mu a^{\neg\alpha}.\,[a]M^{\alpha} \;\Rightarrow\; M, \quad \text{gdy } a \notin \mathrm{FV}(M).$$

$$(\zeta)\quad (\mu a^{\neg(\alpha\to\beta)}.\,M)N \;\Rightarrow\; \mu b^{\neg\beta}.\,M[a := \lambda\!\!\lambda X.\,[b](XN)]$$

Rachunek $\lambda\mu$: fragment implikacyjny

$$(\beta)\quad (\lambda x^\alpha M)N \;\Rightarrow\; M[x := N].$$

$$(\eta_\mu)\quad \mu a^{\neg\alpha}.\,[a]M^\alpha \;\Rightarrow\; M,\quad \text{gdy } a \notin \mathrm{FV}(M).$$

$$(\zeta)\quad (\mu a^{\neg(\alpha\to\beta)}.\,M)N \;\Rightarrow\; \mu b^{\neg\beta}.\,M[a := \lambda\!\!\lambda X.\,[b](XN)]$$

Zeta inaczej:

$$(\zeta)\quad (\mu a^{\neg(\alpha\to\beta)}.\,M)N \;\Rightarrow\; \mu b^{\neg\beta}.\,M[\,[a]\Box := [b](\Box N)\,]$$

Rachunek $\lambda\mu$: fragment implikacyjny

$$(\beta)\quad (\lambda x^{\alpha} M)N \;\Rightarrow\; M[x := N].$$

$$(\eta_\mu)\quad \mu a^{\neg\alpha}.\,[a]M^{\alpha} \;\Rightarrow\; M, \quad \text{gdy } a \notin \mathrm{FV}(M).$$

$$(\zeta)\quad (\mu a^{\neg(\alpha\to\beta)}.\,M)N \;\Rightarrow\; \mu b^{\neg\beta}.\,M[a := \lambda\!\!\lambda X.\,[b](XN)]$$

Zeta inaczej:

$$(\zeta)\quad (\mu a^{\neg(\alpha\to\beta)}.\,M)N \;\Rightarrow\; \mu b^{\neg\beta}.\,M[\,[a]\Box := [b](\Box N)\,]$$

Może być jeszcze:

$$(\beta^{\mu})\quad [b](\mu a^{\neg\alpha}.\,M) \;\Rightarrow\; M[a := b]$$

Semantyka kontynuacyjna

typ termu	sposób użycia	typ kontynuacji	semantyka
τ	$\tau^\bullet$	$\tau^\bullet \to \mathbf{0}$	$\underline{\tau} = (\tau^\bullet \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$
p	p	$p \to \mathbf{0}$	$(p \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$
$\perp$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0} \to \mathbf{0}$	$(\mathbf{0} \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$
$\tau \to \sigma$	$\underline{\tau} \to \underline{\sigma}$	$(\underline{\tau} \to \underline{\sigma}) \to \mathbf{0}$	$((\underline{\tau} \to \underline{\sigma}) \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$

Translacja dla termów (K. Nakazawa, M. Tatsuta, 2008)

$$\underline{M} = \lambda k^{\tau^\bullet \to \mathbf{0}}.\, M \triangleright k$$

$$\begin{array}{rcl}
x^\tau \triangleright K & = & x^{\underline{\tau}}(K) \\
(\lambda x^\sigma .\, M^\tau) \triangleright K & = & K(\lambda x^{\underline{\sigma}}.\, \underline{M}^{\underline{\tau}}) \\
MN \triangleright K & = & M \triangleright (\lambda m.\, m\underline{N}K) \\
[a]M^\sigma \triangleright K & = & M \triangleright k_a \\
(\mu a^{\neg\sigma} M) \triangleright K & = & (M \triangleright \lambda m\, m)[k_a := K]
\end{array}$$

Dla $a : \neg\sigma$, nowa zmienna $k_a : \sigma^\bullet \to \mathbf{0}$.

Wniosek (ale nie natychmiastowy):

silna normalizacja (dla β, η_μ, ζ).

Gry klasyczne

$\exists$ros może zmieniać cel gry.

Gry klasyczne

$\exists$ros może zmieniać cel gry.

Inaczej: gra może mieć wiele celów,

Osiągnięcie dowolnego celu jest wygraną $\exists$rosa.

Gry klasyczne

$\exists$ros może zmieniać cel gry.

Inaczej: gra może mieć wiele celów,

Osiągnięcie dowolnego celu jest wygraną $\exists$rosa.

Zamiast zadania postaci $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \ \vdash \psi$,

mamy zadanie postaci $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \ \psi_1, \ldots, \psi_m$.

Gry klasyczne

$\exists$ros może zmieniać cel gry.

Inaczej: gra może mieć wiele celów,

Osiągnięcie dowolnego celu jest wygraną $\exists$rosa.

Zamiast zadania postaci $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$,

mamy zadanie postaci $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi_1, \ldots, \psi_m$.

To się nazywa *sekwent*.

Klasyczny rachunek sekwentów

Reguły są na Moodlu:

https://moodle.mimuw.edu.pl/draftfile.php/58575/user/draft/17843345/rsekw.pdf

Klasyczny rachunek sekwentów

Sekwenty: $\underbrace{\overbrace{\varphi_1, \ldots, \varphi_n}^{\textit{koniunkcja}}}_{\text{założenia}} \vdash \underbrace{\overbrace{\psi_1, \ldots, \psi_m}^{\textit{alternatywa}}}_{\text{wnioski}} \quad (n, m \geq 0)$

Aksjomaty: $\varphi \vdash \varphi$

Reguły:

– strukturalne,
– logiczne,
– reguła cięcia.

Reguły strukturalne

Wymiana: $$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \vdash \Sigma}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \Sigma} \text{ (LX)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \varphi, \Sigma} \text{ (RX)}$$

Osłabianie: $$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma} \text{ (LW)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma} \text{ (RW)}$$

Skracanie: $$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma} \text{ (LC)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \varphi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma} \text{ (RC)}$$

Można uważać, że sekwent to para zbiorów.

Porównanie

Naturalna dedukcja: Eliminacja i wprowadzanie

$$\frac{\Gamma \vdash \alpha \between \beta}{\ldots}\ (\text{Elim} \between) \qquad \frac{\ldots \alpha \ldots \beta \ldots}{\Gamma \vdash \alpha \between \beta}\ (\text{Intro} \between)$$

Rachunek sekwentów: Wprowadzanie z prawej i z lewej

$$\frac{\ldots \alpha \ldots \beta \ldots}{\ldots, \alpha \between \beta \vdash \ldots}\ (\text{L} \between) \qquad \frac{\ldots \alpha \ldots \beta \ldots}{\cdots \vdash \alpha \between \beta, \ldots}\ (\text{R} \between)$$

$\circ$

Reguły logiczne

$$\frac{\Gamma, \varphi_i \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \Sigma} \quad (\mathsf{LK})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma \quad \Gamma \vdash \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi, \Sigma} \quad (\mathsf{RK})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma \quad \Gamma, \psi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Sigma} \quad (\mathsf{LA})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi_i, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2, \Sigma} \quad (\mathsf{RA})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma \quad \Delta, \psi \vdash \Pi}{\Gamma, \Delta, \varphi \to \psi \vdash \Sigma, \Pi} \quad (\mathsf{LI})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \Sigma} \quad (\mathsf{RI})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Sigma} \quad (\mathsf{LN})$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \neg\varphi, \Sigma} \quad (\mathsf{RN})$$

$$\Gamma, \bot \vdash \quad (\mathsf{LF})$$

$$\Gamma \vdash \top, \Sigma \quad (\mathsf{RT})$$

∘

Reguła cięcia

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma \quad \Delta, \varphi \vdash \Pi}{\Gamma, \Delta \vdash \Sigma, \Pi}\ (\mathrm{cut})$$

Pełność: *Sekwent* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi_1, \ldots, \psi_m$ *ma dowód wtw, gdy* $\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_n \to \psi_1 \vee \cdots \vee \psi_m$ *jest tautologią.*

Dowód używa reguły cięcia, np. tak:

$$\frac{\Delta \vdash \varphi \to \psi \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \psi \vdash \psi}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \psi}}{\Delta, \Gamma \vdash \psi}\ (\mathrm{cut})$$

∘

Przykład: $\vdash ((p \to q) \to p) \to p$

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{p \vdash p}{p \vdash q, p}\,(\mathrm{RW})}{\vdash p \to q, p}\,(\mathrm{RI}) \qquad p \vdash p}{(p \to q) \to p \vdash p, p}\,(\mathrm{LI})}{(p \to q) \to p \vdash p}\,(\mathrm{RC})}{\vdash ((p \to q) \to p) \to p}\,(\mathrm{RI})
$$

$\circ$

Przykład: $\vdash p \vee \neg p$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{p \vdash p}{\vdash \neg p, p}\,(\mathrm{RN})}{\vdash p \vee \neg p, p}\,(\mathrm{RA})}{\vdash p, p \vee \neg p}\,(\mathrm{RX})}{\vdash p \vee \neg p, p \vee \neg p}\,(\mathrm{RA})}{\vdash p \vee \neg p}\,(\mathrm{RC})$$

Gentzen's Hauptsatz

Twierdzenie (o eliminacji cięcia):

Jeśli sekwent $\Gamma \vdash \Delta$ *ma dowód, to ma dowód bez cięcia.*

Zasada podformuł:

*Formuły wystepujące w przesłankach każdej reguły
są podformułami formuł występujących w konkluzji.*

Dowód bez cięcia sekwentu $\vdash \varphi$ używa tylko podformuł φ.

Dowód budujemy od końca, „rozbierając" formuły na części.

Konserwatywność

Własność podformuł:

Formuły wystepujące w przesłankach każdej reguły są podformułami formuł występujących w konkluzji.

Wniosek: Dowód formuły φ wymaga tylko reguł dla spójników, które występują w φ.

∘

Przykład eliminacji cięcia: Dowód

$$
\dfrac{
(\mathrm{R}\to)\,\dfrac{\begin{array}{c}(1)\\ \vdots\\ \Gamma, \varphi \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}
\qquad
\dfrac{\begin{array}{c}(2)\\ \vdots\\ \Gamma \vdash \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}(3)\\ \vdots\\ \Gamma, \psi \vdash \vartheta\end{array}}{\Gamma,\ \varphi \to \psi \vdash \vartheta}\,(\mathrm{L}\to)
}{\Gamma \vdash \vartheta}\,(\mathrm{Cut})
$$

przekształcamy w dowód:

$$
\dfrac{
(\mathrm{Cut})\,\dfrac{\begin{array}{c}(2)\\ \vdots\\ \Gamma \vdash \varphi\end{array} \qquad \begin{array}{c}(1)\\ \vdots\\ \Gamma, \varphi \vdash \psi\end{array}}{\Gamma \vdash \psi}
\qquad
\begin{array}{c}(3)\\ \vdots\\ \vdots\\ \Gamma, \psi \vdash \vartheta\end{array}
}{\Gamma \vdash \vartheta}\,(\mathrm{Cut})
$$

Kłopotliwy przypadek

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \dfrac{\Delta, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Delta, \varphi \vdash \psi}}{\Gamma, \Delta \vdash \psi}$$

Kłopotliwy przypadek

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \dfrac{\Delta, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Delta, \varphi \vdash \psi}}{\Gamma, \Delta \vdash \psi} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Delta, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \Delta, \varphi \vdash \psi}$$

Kłopotliwy przypadek

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \dfrac{\Delta, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Delta, \varphi \vdash \psi}}{\Gamma, \Delta \vdash \psi} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Delta, \varphi, \varphi \vdash \psi}{\Gamma, \Delta, \varphi \vdash \psi}$$

Rozwiązanie:

Zamiast zwykłej reguły cięcia rozważa się „multi-cut":

$$\dfrac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma, \varphi, \ldots, \varphi \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \sigma}\ \text{(multi)}$$

Intuicjonistyczny rachunek sekwentów

Sekwenty mają (co najwyżej) jedną formułę po prawej stronie.

Wymiana: $$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \vdash \sigma}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \sigma} \text{ (LX)}$$

Osłabianie: $$\frac{\Gamma \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \sigma} \text{ (LW)} \qquad \frac{\Gamma \vdash}{\Gamma \vdash \sigma} \text{ (RW)}$$

Skracanie: $$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \sigma} \text{ (LC)}$$

Cięcie: $$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma, \varphi \vdash \sigma}{\Gamma \vdash \sigma} \text{ (cut)}$$

Intuicjonistyczny rachunek sekwentów

$$\frac{\Gamma, \varphi_i \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \sigma} \text{ (LK)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi} \text{ (RK)}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \sigma \quad \Gamma, \psi \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \sigma} \text{ (LA)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_i}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \text{ (RA)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma, \psi \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \sigma} \text{ (LI)} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi} \text{ (RI)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash} \text{ (LN)} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash}{\Gamma \vdash \neg\varphi} \text{ (RN)}$$

$$\Gamma, \bot \vdash \quad \text{(LF)} \qquad \Gamma \vdash \top \quad \text{(RT)}$$

∘

Intuicjonistyczny rachunek sekwentów

$$\frac{\Gamma, \varphi_i \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash \sigma} \text{ (LK)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \wedge \psi} \text{ (RK)}$$

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \sigma \quad \Gamma, \psi \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \sigma} \text{ (LA)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_i}{\Gamma \vdash \varphi_1 \vee \varphi_2} \text{ (RA)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi \quad \Gamma, \psi \vdash \sigma}{\Gamma, \varphi \to \psi \vdash \sigma} \text{ (LI)} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi} \text{ (RI)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \bot} \text{ (LN)} \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg\varphi} \text{ (RN)}$$

$$\Gamma, \bot \vdash \boldsymbol{\sigma} \text{ (LF)} \qquad \Gamma \vdash \top \text{ (RT)}$$

$\circ$

Przypisanie termów (1)

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi \quad \Gamma \vdash N : \psi}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \varphi \wedge \psi} \text{ (RK)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi_i}{\Gamma \vdash \mathsf{in}_i(M) : \varphi_1 \vee \varphi_2} \text{ (RA)}$$

$$\frac{\Gamma, x : \varphi \vdash M : \psi}{\Gamma \vdash \lambda x^{\varphi}.M : \varphi \to \psi} \text{ (RI)}$$

◦

Przypisanie termów (2)

$$\frac{\Gamma, x : \varphi_i \vdash M : \sigma}{\Gamma, y : \varphi_1 \wedge \varphi_2 \vdash M[x := y\{i\}] : \sigma} \ (\mathrm{LK})$$

$$\frac{\Gamma, x : \varphi \vdash M : \sigma \quad \Gamma, y : \psi \vdash N : \sigma}{\Gamma, z : \varphi \vee \psi \vdash \texttt{case}\ z\ \texttt{of}\ [x]M\ \texttt{or}\ [y]N : \sigma} \ (\mathrm{LA})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi \quad \Gamma, x : \psi \vdash N : \sigma}{\Gamma, y : \varphi \to \psi \vdash N[x := yM] : \sigma} \ (\mathrm{LI})$$

$$\Gamma, x : \bot \vdash \varepsilon_\sigma(x) \ (\mathrm{LF})$$

Przypisanie termów (3)

$$\frac{\Gamma \vdash M : \varphi \qquad \Gamma, x : \varphi \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash N[x := M] : \sigma} \text{(cut)}$$

$\circ$

Postaci normalne

Fakt: *Termy dowodowe dla rachunku sekwentów bez cięcia, to dokładnie postaci normalne ze względu na beta-redukcje i permutacje.*

Postaci normalne

Fakt: *Termy dowodowe dla rachunku sekwentów bez cięcia, to dokładnie postaci normalne ze względu na beta-redukcje i permutacje.*

Wniosek: *Jeśli* $\vdash \alpha \vee \beta$, *to* $\vdash \alpha$ *lub* $\vdash \beta$.

Dowód: Jeśli $\varnothing \vdash M : \alpha \vee \beta$, to $M = \mathsf{in} \ldots$.
Inaczej: żadna reguła nie pasuje oprócz $(R\vee)$.

Postaci normalne

Fakt: *Termy dowodowe dla rachunku sekwentów bez cięcia, to dokładnie postaci normalne ze względu na beta-redukcje i permutacje.*

Wniosek: *Jeśli* $\vdash \alpha \vee \beta$, *to* $\vdash \alpha$ *lub* $\vdash \beta$.

Dowód: Jeśli $\varnothing \vdash M : \alpha \vee \beta$, to $M = \mathsf{in}\ldots$.
Inaczej: żadna reguła nie pasuje oprócz $(R\vee)$.

No dobrze, ale dlaczego to nie działa dla logiki klasycznej?

Postaci normalne

Fakt: *Termy dowodowe dla rachunku sekwentów bez cięcia, to dokładnie postaci normalne ze względu na beta-redukcje i permutacje.*

Wniosek: *Jeśli* $\vdash \alpha \vee \beta$, *to* $\vdash \alpha$ *lub* $\vdash \beta$.

Dowód: Jeśli $\varnothing \vdash M : \alpha \vee \beta$, to $M = \mathsf{in} \ldots$.
Inaczej: żadna reguła nie pasuje oprócz $(R\vee)$.

No dobrze, ale dlaczego to nie działa dla logiki klasycznej?

Bo jest jeszcze skracanie z prawej.

Rules for conjunction in sequent calculus

First choice (additive):

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Sigma}\,(L\&) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Gamma \vdash \beta, \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta, \Sigma}\,(R\&)$$

Rules for conjunction in sequent calculus

First choice (additive):

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Sigma}\,(L\&) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Gamma \vdash \beta, \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta, \Sigma}\,(R\&)$$

Second choice (multiplicative):

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Sigma}\,(L\otimes) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Delta \vdash \beta, \Pi}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \wedge \beta, \Sigma, \Pi}\,(R\otimes)$$

Rules for conjunction in sequent calculus

First choice (additive):

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Sigma}\,(L\&) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Gamma \vdash \beta, \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta, \Sigma}\,(R\&)$$

Second choice (multiplicative):

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta \vdash \Sigma}\,(L\otimes) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Delta \vdash \beta, \Pi}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \wedge \beta, \Sigma, \Pi}\,(R\otimes)$$

W obecności reguł strukturalnych można wybrać cokolwiek.

Reguły strukturalne

Wymiana: $$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \vdash \Sigma}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \Sigma}(\mathsf{LX}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \varphi, \Sigma}(\mathsf{RX})$$

Reguły strukturalne

Wymiana:

$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \vdash \Sigma}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \Sigma}(\mathsf{LX}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \varphi, \Sigma}(\mathsf{RX})$$

Osłabianie:

$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}(\mathsf{LW}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma}(\mathsf{RW})$$

Reguły strukturalne

Wymiana: $$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \vdash \Sigma}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \Sigma}(\mathsf{LX}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \varphi, \Sigma}(\mathsf{RX})$$

Osłabianie: $$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}(\mathsf{LW}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma}(\mathsf{RW})$$

Bez osłabiania: każde założenie musi być wykorzystane.

Reguły strukturalne

Wymiana:
$$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \vdash \Sigma}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \Sigma}(\mathsf{LX}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \varphi, \Sigma}(\mathsf{RX})$$

Osłabianie:
$$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}(\mathsf{LW}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma}(\mathsf{RW})$$

Bez osłabiania: każde założenie musi być wykorzystane.

Skracanie:
$$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}(\mathsf{LC}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \varphi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma}(\mathsf{RC})$$

Reguły strukturalne

Wymiana: $$\frac{\Gamma, \varphi, \psi, \Delta \vdash \Sigma}{\Gamma, \psi, \varphi, \Delta \vdash \Sigma}(\mathsf{LX}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \Delta, \psi, \varphi, \Sigma}(\mathsf{RX})$$

Osłabianie: $$\frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}(\mathsf{LW}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma}(\mathsf{RW})$$

Bez osłabiania: każde założenie musi być wykorzystane.

Skracanie: $$\frac{\Gamma, \varphi, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}(\mathsf{LC}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi, \varphi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma}(\mathsf{RC})$$

Bez skracania: każde założenie może być użyte tylko raz.

Logika liniowa

Linear logic: the data flow paradigm

- Correctness criterion = construction respecting resources.
- Intuitionistic construction is a *function*,
  linear construction is an *action*.
- An assumption has to be used (consumed) exactly once:
  cannot be re-used nor abandoned.
- But some resources are re-usable ($!\alpha$).

Lizak

Linear implication $\alpha \multimap \beta$ represents the type of process in which the assumption (resource) α is processed into the conclusion β, without re-using any part of it, and without leaving any unused garbage.

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma \quad \Delta, \psi \vdash \Pi}{\Gamma, \Delta, \varphi \multimap \psi \vdash \Sigma, \Pi}\ (\mathrm{L}\multimap) \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi \multimap \psi, \Sigma}\ (\mathrm{R}\multimap)$$

$\circ$

Przykład

Wnioskowania niepoprawne liniowo:

$p, q \not\vdash p$

$(p \multimap p \multimap q), p \not\vdash q$

$p, p, p \multimap q, q \multimap q \multimap r \not\vdash r$

$\circ$

Dwie koniunkcje

Wraz (with):

$$\frac{\Gamma, \alpha \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \,\&\, \beta \vdash \Sigma}\,(L\&) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Gamma \vdash \beta, \Sigma}{\Gamma \vdash \alpha \,\&\, \beta, \Sigma}\,(R\&)$$

Tensor:

$$\frac{\Gamma, \alpha, \beta \vdash \Sigma}{\Gamma, \alpha \otimes \beta \vdash \Sigma}\,(L\otimes) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Sigma \quad \Delta \vdash \beta, \Pi}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \otimes \beta, \Sigma, \Pi}\,(R\otimes)$$

Tensor

An object of type $\alpha \otimes \beta$ is a pair of objects: one of type α, the other of type β. Creating each component of the pair requires separate resources. Consuming a pair requires using both components.

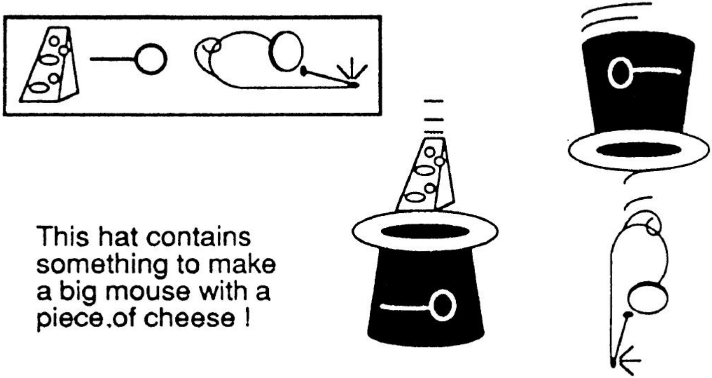
$$\frac{\Sigma, \alpha, \beta \vdash \rho}{\Sigma, \alpha \otimes \beta \vdash \rho}\,(L\otimes) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Delta \vdash \beta}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \otimes \beta}\,(R\otimes)$$

Tensor

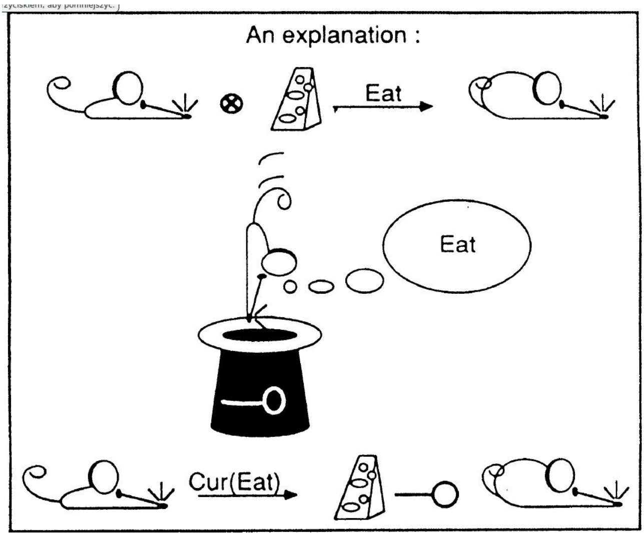
An object of type $\alpha \otimes \beta$ is a pair of objects: one of type α, the other of type β. Creating each component of the pair requires separate resources. Consuming a pair requires using both components.

$$\frac{\Sigma, \alpha, \beta \vdash \rho, \Pi}{\Sigma, \alpha \otimes \beta \vdash \rho, \Pi}\,(L\otimes) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Pi \quad \Delta \vdash \beta, \Sigma}{\Gamma, \Delta \vdash \alpha \otimes \beta, \Pi, \Sigma}\,(R\otimes)$$

Zagadka Lafonta



Zagadka Lafonta



With (wraz)

An object of type $\alpha \mathbin{\&} \beta$ is a “virtual” pair of objects (one of type α, the other of type β), from which exactly one can be potentially created from the same resources. In other words, $\alpha \mathbin{\&} \beta$ is a “right of choice” between α or β. This right belongs to the consumer.

$$\frac{\Sigma, \alpha \vdash \rho}{\Sigma, \alpha \mathbin{\&} \beta \vdash \rho}\,(L\&) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \mathbin{\&} \beta}\,(R\&)$$

$\circ$

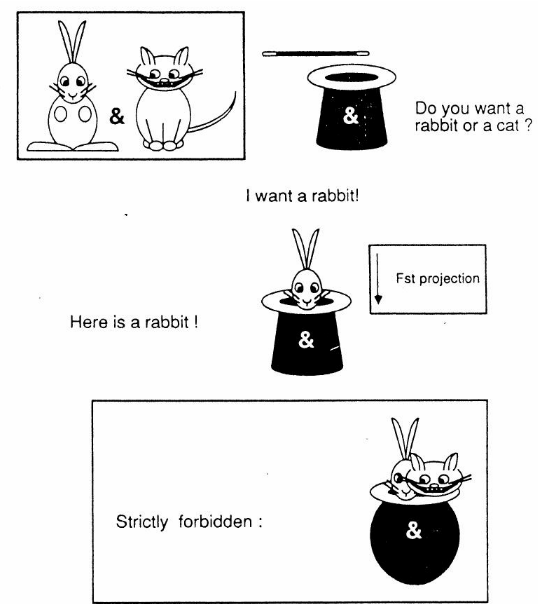
With (wraz)

An object of type $\alpha \mathbin{\&} \beta$ is a “virtual” pair of objects (one of type α, the other of type β), from which exactly one can be potentially created from the same resources. In other words, $\alpha \mathbin{\&} \beta$ is a “right of choice” between α or β. This right belongs to the consumer.

$$\frac{\Sigma, \alpha \vdash \rho, \Pi}{\Sigma, \alpha \mathbin{\&} \beta \vdash \rho, \Pi}\,(L\&) \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha, \Pi \quad \Gamma \vdash \beta, \Pi}{\Gamma \vdash \alpha \mathbin{\&} \beta, \Pi}\,(R\&)$$

$\circ$

With (wraz)


&
&
Do you want a rabbit or a cat ?
I want a rabbit!
Fst projection
Here is a rabbit !
&
Strictly forbidden :
&

Równoważność

$$\alpha \multimapboth \beta \quad := \quad (\alpha \multimap \beta) \,\&\, (\beta \multimap \alpha)$$

Fakt: $\Gamma \vdash \alpha \multimapboth \beta$ *wtw, gdy* $\Gamma \vdash \alpha \multimap \beta$ *oraz* $\Gamma \vdash \beta \multimap \alpha$.

Negacja i dualność

Negation:

Linear negation $\alpha^{\perp}$ is the dual type of α.
Producing data of type α is the same as consuming data of type $\alpha^{\perp}$.

$$\frac{\Gamma \vdash \varphi, \Sigma}{\Gamma, \varphi^{\perp} \vdash \Sigma}\ (\mathrm{L}^{\perp}) \qquad\qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi^{\perp}, \Sigma}\ (\mathrm{R}^{\perp})$$

Note: Implications $\alpha \multimap \beta$ and $\beta^{\perp} \multimap \alpha^{\perp}$ are equivalent.
(Analogy with electric current.)

Plus: An object of type $\alpha \oplus \beta$ is a pair consisting of an object of type α or of type β, and a flag showing which case actually holds. The right of choice between α or β belongs to the producer. The consumer opens a box and uses the contents according to the instruction on the flag.

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma \quad \Gamma, \psi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \oplus \psi \vdash \Sigma} \ (\mathrm{L}\oplus) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_i, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi_1 \oplus \varphi_2, \Sigma} \ (\mathrm{R}\oplus)$$

Plus: An object of type $\alpha \oplus \beta$ is a pair consisting of an object of type α or of type β, and a flag showing which case actually holds. The right of choice between α or β belongs to the producer. The consumer opens a box and uses the contents according to the instruction on the flag.

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \Sigma \quad \Gamma, \psi \vdash \Sigma}{\Gamma, \varphi \oplus \psi \vdash \Sigma} \ (\mathrm{L}\oplus) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi_i, \Sigma}{\Gamma \vdash \varphi_1 \oplus \varphi_2, \Sigma} \ (\mathrm{R}\oplus)$$

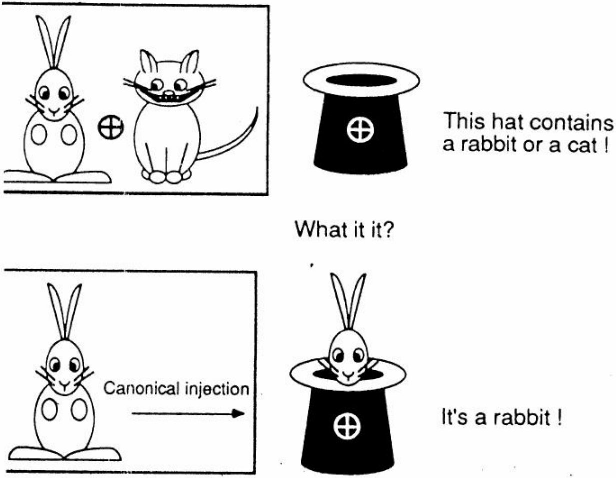
Duality: Plus ($\oplus$) is the other side of With ($\&$):

$$(\alpha \oplus \beta)^\perp \multimapboth \alpha^\perp \& \beta^\perp$$

$$(\alpha \& \beta)^\perp \multimapboth \alpha^\perp \oplus \beta^\perp$$

(Receiving a surprise is sending the right of choice.)

Plus



⊕
⊕
This hat contains
a rabbit or a cat !
What it it?
Canonical injection
⊕
It's a rabbit !

To udowodnimy:

- $(\alpha \multimap \beta)^{\perp} \multimapboth (\alpha \otimes \beta^{\perp})$;
- $(\alpha \otimes \beta \multimap \gamma) \multimapboth (\alpha \multimap \beta \multimap \gamma)$;
- $(\alpha \multimap \beta) \mathbin{\&} (\alpha \multimap \gamma) \multimapboth (\alpha \multimap \beta \mathbin{\&} \gamma)$;
- $(\alpha \multimap \gamma) \mathbin{\&} (\beta \multimap \gamma) \multimapboth (\alpha \oplus \beta \multimap \gamma)$;
- $\alpha \otimes (\beta \oplus \gamma) \multimapboth (\alpha \otimes \beta) \oplus (\alpha \otimes \gamma)$;
- $(\alpha \mathbin{\&} \beta)^{\perp} \multimapboth \alpha^{\perp} \oplus \beta^{\perp}$;
- $(\alpha \oplus \beta)^{\perp} \multimapboth \alpha^{\perp} \mathbin{\&} \beta^{\perp}$.

Tego nie udowodnimy:

- $\nvdash \alpha \multimap \beta \multimap \alpha$;
- $\nvdash (\alpha \multimap \beta \multimap \gamma) \multimap (\alpha \multimap \beta) \multimap \alpha \multimap \gamma$;
- $\nvdash \alpha \oplus (\beta \otimes \gamma) \multimapboth (\alpha \oplus \beta) \otimes (\alpha \oplus \gamma)$

$\circ$

To tylko w prawo:

- $(\alpha \multimap \beta) \oplus (\alpha \multimap \gamma) \multimap (\alpha \multimap \beta \oplus \gamma)$;
- $(\alpha \,\&\, \beta) \oplus (\alpha \,\&\, \gamma) \multimap \alpha \,\&\, (\beta \oplus \gamma)$;
- $\alpha \oplus (\beta \,\&\, \gamma) \multimap (\alpha \oplus \beta) \,\&\, (\alpha \oplus \gamma)$;
- $\alpha \otimes (\beta \,\&\, \gamma) \multimap (\alpha \otimes \beta) \,\&\, (\alpha \otimes \gamma)$.

∘

Of course: Type $!\alpha$ represents the ability to create *any required* amount of data of type α.
(Consumer of $!\alpha$ makes the decision.)

Maybe: An object of type $?\alpha$ is the ability to consume *a certain* amount of data of type α.
(Producer of $?\alpha$ makes the decision.)

Duality: $(!\alpha)^{\perp} \multimap\!\!\circ\; ?(\alpha^{\perp})$ and $(?\alpha)^{\perp} \multimap\!\!\circ\; !(\alpha^{\perp})$

Przykład obiadowy

$$\begin{aligned} \mathit{15\ z\text{ł}} \multimap\ & (\mathit{pomidorowa} \,\&\, \mathit{krupnik}) \otimes (\mathit{kotlet} \,\&\, \mathit{ryba}) \\ & \otimes (!\mathit{ziemniaki} \,\&\, !\mathit{ry\dot{z}}) \otimes (\mathit{kompot} \oplus \mathit{jab\text{ł}ko}) \end{aligned}$$

$\circ$

Modalności

- $(!\alpha)^\perp \multimapboth ?\alpha^\perp$ oraz $(?\alpha)^\perp \multimapboth !\alpha^\perp$;
- $!\alpha \multimapboth !!\alpha$;
- $!\alpha \ \multimapboth \ 1 \,\&\, \alpha \,\&\, (!\alpha \otimes !\alpha)$;
- $!(\alpha \,\&\, \beta) \multimapboth !(!\alpha \,\&\, !\beta)$;
- $!(\alpha \,\&\, \beta) \multimap !\alpha \,\&\, !\beta$;
- $!(!\alpha \multimap \beta) \multimap !\alpha \multimap !\beta$;
- $!(\alpha \multimap \beta \,\&\, \gamma) \multimap !(\alpha \multimap \beta) \,\&\, !(\alpha \multimap \gamma)$.

○

Which of the following are linear theorems?

- $\alpha^{\perp\perp} \multimapboth \alpha$?
- $\alpha \otimes \alpha \multimap \alpha$?
- $(\alpha \otimes \beta \multimap \gamma) \multimapboth (\alpha \multimap \beta \multimap \gamma)$
- $(\gamma \multimap \alpha) \otimes (\alpha \otimes \alpha \multimap \beta) \multimap (\gamma \otimes \gamma \multimap \beta)$
- $\alpha \oplus (\beta \,\&\, \gamma) \multimap (\alpha \oplus \beta) \,\&\, (\alpha \oplus \gamma)$
- $(\alpha \oplus \beta) \,\&\, (\alpha \oplus \gamma) \multimap \alpha \oplus (\beta \,\&\, \gamma)$
- $\alpha \otimes (\beta \,\&\, \gamma) \multimap (\alpha \otimes \beta) \,\&\, (\alpha \otimes \gamma)$
- $(\alpha \otimes \beta) \,\&\, (\alpha \otimes \gamma) \multimap \alpha \otimes (\beta \,\&\, \gamma)$
- $!(\alpha \,\&\, \beta) \multimap !\alpha \,\&\, !\beta$
- $!\alpha \,\&\, !\beta \multimap !(\alpha \,\&\, \beta)$
- $!(!\alpha \multimap \beta) \multimap !\alpha \multimap !\beta$
- $(!\alpha \multimap !\beta) \multimap !(!\alpha \multimap \beta)$
- $!(!\alpha \multimap !\beta) \multimap !(!\alpha \multimap \beta)$