Logika i teoria typów

Wykład 5

16 listopada 2021

Tydzień temu

Twierdzenie:

Intuicjonistyczny rachunek zdań jest PSPACE-zupełny.

Tydzień temu

Twierdzenie:

Intuicjonistyczny rachunek zdań jest PSPACE-zupełny.

Dowód: Redukcja problemu stopu dla automatów monotonicznych. Konfiguracja: $\Gamma \vdash q$.

- Cel atomowy q to stan maszyny;
- Otoczenie Γ to zawartość pamięci, w tym program.
- Założenie $p \to q$ umożliwia zmianę stanu z q na p.
- Założenie $(b \to p) \to q$ umożliwia zmianę stanu z q na p, z jednoczesnym zapisaniem b w pamięci.
- Założenie $a \to p \to q$ umożliwia zmianę stanu z q na p, pod warunkiem, że w pamięci jest zapisane a.
- Założenie $r \to p \to q$ umożliwia rozgałęzienie uniwersalne na stan p i stan r.

Rzędy

Rząd zero = atomy;
Rząd $n+1$ = formuły $\alpha_1 \to \cdots \alpha_k \to p$,
gdzie α_i są rzędu co najwyżej n.

Np. ta formuła jest rzędu 3:

$((p \to q) \to r) \to ((r \to p \to s) \to r) \to p$

Rzędy

Rząd zero = atomy;
Rząd $n+1$ = formuły $\alpha_1 \to \cdots \alpha_k \to p$,
gdzie α_i są rzędu co najwyżej n.

Np. ta formuła jest rzędu 3:

$$((p \to q) \to r) \to ((r \to p \to s) \to r) \to p$$

Automaty monotoniczne są reprezentowane formułami rzędu 3.

◦

Twierdzenie:

Intuicjonistyczny rachunek zdań jest PSPACE-zupełny.

Twierdzenie:

Intuicjonistyczny rachunek zdań jest PSPACE-zupełny.

To mało powiedziane.

Twierdzenie:

Intuicjonistyczny rachunek zdań jest PSPACE-zupełny.

To mało powiedziane.

W istocie PSPACE-zupełny jest fragment implikacyjny
i to ograniczony do formuł rzędu 3.

Twierdzenie

Intuicjonistyczny rachunek zdań redukuje się w pamięci logarytmicznej do fragmentu implikacyjnego rzędu 3.

Twierdzenie

Intuicjonistyczny rachunek zdań redukuje się w pamięci logarytmicznej do fragmentu implikacyjnego rzędu 3.

Dowód:

Dowolna formuła $\to$ automat $\to$ formuła implikacyjna rzędu 3.

Twierdzenie

Intuicjonistyczny rachunek zdań redukuje się w pamięci logarytmicznej do fragmentu implikacyjnego rzędu 3.

Dowód:

Dowolna formuła $\to$ automat $\to$ formuła implikacyjna rzędu 3.

Przykład:

Formuła $(((e \to d) \to c) \to b) \to a$ jest rzędu 4

i nie jest *równoważna* żadnej formule rzędu 3.

O wyższości Wajsberga i Ben-Yellesa nad Davisem i Putnamem

Klasyczny rachunek zdań:

– reprezentuje problemy obliczeniowe o złozoności NP;

– jako koniunkcje statycznych więzów (SAT);

– dla których trzeba szukać rozwiązań ad hoc.

O wyższości Wajsberga i Ben-Yellesa nad Davisem i Putnamem

Klasyczny rachunek zdań:

– reprezentuje problemy obliczeniowe o złozoności NP;

– jako koniunkcje statycznych więzów (SAT);

– dla których trzeba szukać rozwiązań ad hoc.

Intuicjonistyczny rachunek zdań:

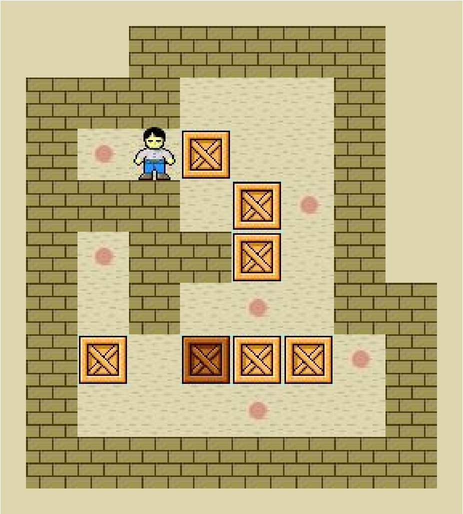
– reprezentuje problemy obliczeniowe o złożoności PSPACE;

– jako dynamiczne zadania dowodowe,

– których rozwiązania bezpośrednio realizują obliczenie.

Przykład

Do tego zadania SAT-solvery się nie nadają.



Silna normalizacja

Silna normalizacja

Twierdzenie: *Jeśli istnieje dowód osądu* $\Gamma \vdash \varphi$*, to istnieje dowód normalny.*

Silna normalizacja

Twierdzenie: *Jeśli istnieje dowód osądu* $\Gamma \vdash \varphi$, *to istnieje dowód normalny.*

Lepsze twierdzenie: *Każdy dowód osądu* $\Gamma \vdash \varphi$ *można przekształcić w dowód normalny.*

$\circ$

Przypadek implikacyjny

Przypadek implikacyjny

Term w postaci β-normalnej: term, którego nie można redukować.

To jest to samo co implikacyjny dowód normalny.

Przypadek implikacyjny

Term w postaci β-normalnej: term, którego nie można redukować.

To jest to samo co implikacyjny dowód normalny.

Normalizacja:
Jeśli $\Gamma \vdash M : \tau$, *to* $M \twoheadrightarrow_\beta N$, *gdzie* N *jest normalny.*

Przypadek implikacyjny

Term w postaci β-normalnej: term, którego nie można redukować.

To jest to samo co implikacyjny dowód normalny.

Normalizacja:
Jeśli $\Gamma \vdash M : \tau$*, to* $M \twoheadrightarrow_\beta N$*, gdzie* N *jest normalny.*

Silna normalizacja:
Jeśli $\Gamma \vdash M : \tau$*, to każdy ciąg redukcji termu* M *jest skończony.*

○

Silna normalizacja

Twierdzenie: *Rachunek lambda z typami prostymi ma własność silnej normalizacji: każdy poprawnie typowany term jest silnie* $\beta\eta$*-normalizowalny.*

Wstęp do dowodu

Konwencja:

- termy (w tym zmienne) mają ustalone typy;
- nie piszemy tych typów.

Lemat 0: *(1) Podterm termu silnie normalizowalnego jest silnie normalizowalny.*

(2) Jeśli $A[x := B] \in SN$*, to* $A \in SN$*.*

(3) Jeśli $A \in SN$ *i* $A \to B$*, to* $B \in SN$*.*

Wstęp do dowodu

Definicja: Określamy klasę termów $\mathcal{S}$ przez indukcję:

1. Jeśli $N_1, \ldots, N_k \in \mathcal{S}$, to $xN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$;
2. Jeśli $N \in \mathcal{S}$, to $\lambda x\, N \in \mathcal{S}$;
3. Jeśli $Q \in \mathcal{S}$ oraz $P[x := Q]N_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$,
   to $(\lambda x\, P)QN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$.

Wstęp do dowodu

Definicja: Określamy klasę termów $\mathcal{S}$ przez indukcję:

1. Jeśli $N_1, \ldots, N_k \in \mathcal{S}$, to $xN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$;
2. Jeśli $N \in \mathcal{S}$, to $\lambda x\, N \in \mathcal{S}$;
3. Jeśli $Q \in \mathcal{S}$ oraz $P[x := Q]N_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$,
   to $(\lambda x\, P)QN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$.

Lemat 1: Jeśli $M \in \mathcal{S}$, to $M \in \mathrm{SN}_{\beta\eta}$.

Wstęp do dowodu

Definicja: Określamy klasę termów $\mathcal{S}$ przez indukcję:

1. Jeśli $N_1, \ldots, N_k \in \mathcal{S}$, to $xN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$;
2. Jeśli $N \in \mathcal{S}$, to $\lambda x\, N \in \mathcal{S}$;
3. Jeśli $Q \in \mathcal{S}$ oraz $P[x := Q]N_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$,
   to $(\lambda x\, P)QN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$.

Lemat 1: Jeśli $M \in \mathcal{S}$, to $M \in \mathrm{SN}_{\beta\eta}$.

Dowód: Indukcja ze względu na definicję $M \in \mathcal{S}$.

∘

1. $N_1, \dots, N_k \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad xN_1 \dots N_k \in \mathcal{S}$;
2. $N \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \lambda x\, N \in \mathcal{S}$;
3. $Q \in \mathcal{S}, \quad P[x := Q]N_1 \dots N_k \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad (\lambda x\, P)QN_1 \dots N_k \in \mathcal{S}$.

Lemat 2: Jeśli $M \in \mathsf{SN}_\beta$, to $M \in \mathcal{S}$.

1. $N_1, \ldots, N_k \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad xN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$;
2. $N \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \lambda x\, N \in \mathcal{S}$;
3. $Q \in \mathcal{S}, \quad P[x := Q]N_1 \ldots N_k \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad (\lambda x\, P)QN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$.

Lemat 2: Jeśli $M \in \mathrm{SN}_\beta$, to $M \in \mathcal{S}$.

Dowód: Indukcja ze względu na dwa parametry:

– pierwszy to maksymalna długość redukcji termu M,
– drugi to długość termu M.

1. $N_1, \ldots, N_k \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad xN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$;
2. $N \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \lambda x\, N \in \mathcal{S}$;
3. $Q \in \mathcal{S}, \quad P[x := Q]N_1 \ldots N_k \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad (\lambda x\, P)QN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$.

Lemat 2: Jeśli $M \in \mathrm{SN}_\beta$, to $M \in \mathcal{S}$.

Dowód: Indukcja ze względu na dwa parametry:

– pierwszy to maksymalna długość redukcji termu M,
– drugi to długość termu M.

$\circ$

Główny lemat

Lemat 3: *Jeśli* $M, P \in \mathcal{S}$, *to* $M[x := P] \in \mathcal{S}$.

Dowód twierdzenia: Z lematów 1 i 2 wynika, że $\mathsf{SN}_\beta = \mathsf{SN}_{\beta\eta} = \mathcal{S}$. Wystarczy więc udowodnić, że każdy (poprawny) term M jest w $\mathcal{S}$.

– Jeśli M jest zmienną, to oczywiste.

– Jeśli M jest abstrakcją, to teza wynika z założenia indukcyjnego.

– Jeśli M jest aplikacją PQ to stosujemy lemat 3 do podstawienia $(xQ)[x := P]$.

$\circ$

1. $N_1, \ldots, N_k \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad xN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$;
2. $N \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \lambda x\, N \in \mathcal{S}$;
3. $Q \in \mathcal{S}, \quad P[x := Q]N_1 \ldots N_k \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad (\lambda x\, P)QN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$.

Lemat 3: *Jeśli $M^\sigma, P^\tau \in \mathcal{S}$, to $M[x := P] \in \mathcal{S}$.*

Dowód: Indukcja ze względu na trzy parametry:

– pierwszy to długość typu τ termu P;
– drugi to maksymalna długość redukcji termu M,
– trzeci to długość termu M.

1. $N_1, \ldots, N_k \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad xN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$;
2. $N \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \lambda x\, N \in \mathcal{S}$;
3. $Q \in \mathcal{S}, \quad P[x := Q]N_1 \ldots N_k \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad (\lambda x\, P)QN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$.

Lemat 3: *Jeśli $M^\sigma, P^\tau \in \mathcal{S}$, to $M[x := P] \in \mathcal{S}$.*

Dowód: Indukcja ze względu na trzy parametry:

– pierwszy to długość typu τ termu P;
– drugi to maksymalna długość redukcji termu M,
– trzeci to długość termu M.

Opuszczamy łatwe przypadki.

○

1. $N_1, \ldots, N_k \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad xN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$;
2. $N \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad \lambda x\, N \in \mathcal{S}$;
3. $Q \in \mathcal{S}, \quad P[x := Q]N_1 \ldots N_k \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad (\lambda x\, P)QN_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$.

Lemat 3: *Jeśli $M^\sigma, P^\tau \in \mathcal{S}$, to $M[x := P] \in \mathcal{S}$.*

Dowód: Indukcja ze względu na trzy parametry:

– pierwszy to długość typu τ termu P;
– drugi to maksymalna długość redukcji termu M,
– trzeci to długość termu M.

Przypadek 4: $M = xQN_1 \ldots N_k$, gdzie $Q, N_1 \ldots N_k \in \mathcal{S}$.
Wtedy $M[x := P] = PQ[x{:=}P]N_1[x{:=}P] \ldots N_k[x{:=}P]$.
Z założenia indukcyjnego łatwo wynika
$Q[x := P], N_1[x := P], \ldots, N_k[x := P] \in \mathcal{S}$.

Wystarczy pokazać, że $M[x := P] \in \mathrm{SN}_\beta$.

Wiemy: $Q[x := P], N_1[x := P], \ldots, N_k[x := P] \in \mathcal{S}$.
Chcemy:
$M[x := P] = PQ[x{:=}P]N_1[x{:=}P] \ldots N_k[x{:=}P] \in \mathrm{SN}$.

Wiemy: $Q[x := P], N_1[x := P], \ldots, N_k[x := P] \in \mathcal{S}$.
Chcemy:
$M[x := P] = PQ[x{:=}P]N_1[x{:=}P] \ldots N_k[x{:=}P] \in \mathrm{SN}$.

Redukcje wewnętrzne muszą się zakończyć. Niech:

$M[x{:=}P] \twoheadrightarrow (\lambda y\, R)Q'N_1' \ldots N_k' \to R[y{:=}Q']N_1' \ldots N_k' \twoheadrightarrow \cdots$

gdzie $P \twoheadrightarrow \lambda y\, R : \tau$.

Wiemy: $Q[x := P], N_1[x := P], \ldots, N_k[x := P] \in \mathcal{S}$.
Chcemy:
$M[x := P] = PQ[x{:=}P]N_1[x{:=}P] \ldots N_k[x{:=}P] \in \mathrm{SN}$.

Redukcje wewnętrzne muszą się zakończyć. Niech:

$M[x{:=}P] \twoheadrightarrow (\lambda y\, R)Q'N_1' \ldots N_k' \rightarrow R[y{:=}Q']N_1' \ldots N_k' \twoheadrightarrow \cdots$

gdzie $P \twoheadrightarrow \lambda y\, R : \tau$. No to $\tau = \tau_1 \rightarrow \tau_2$ oraz $Q' : \tau_1$.
Ale typ τ_1 jest krótszy niż τ, więc $R[y{:=}Q'] \in \mathcal{S}$.

Wiemy: $Q[x := P], N_1[x := P], \ldots, N_k[x := P] \in \mathcal{S}$.
Chcemy:
$M[x := P] = PQ[x{:=}P]N_1[x{:=}P] \ldots N_k[x{:=}P] \in \mathrm{SN}$.

Redukcje wewnętrzne muszą się zakończyć. Niech:

$M[x{:=}P] \twoheadrightarrow (\lambda y\, R)Q'N_1' \ldots N_k' \to R[y{:=}Q']N_1' \ldots N_k' \twoheadrightarrow \cdots$

gdzie $P \twoheadrightarrow \lambda y\, R : \tau$. No to $\tau = \tau_1 \to \tau_2$ oraz $Q' : \tau_1$.
Ale typ τ_1 jest krótszy niż τ, więc $R[y{:=}Q'] \in \mathcal{S}$.

Skoro $N_1, \ldots, N_k \in \mathsf{SN}$, to $zN_1' \ldots N_k' \in \mathsf{SN} = \mathcal{S}$. Chytry trick:

$$R[y := Q']N_1' \ldots N_k' = (zN_1' \ldots N_k')[z := R[y := Q']],$$

gdzie $z : \tau_2$, i znowu krótszy typ, więc całość jest w $\mathcal{S} = \mathrm{SN}$.

Silna normalizacja

Twierdzenie: *Rozszerzony rachunek lambda ma własność silnej normalizacji ze względu na β-redukcje.*

Dowód: Redukujemy rozszerzony rachunek lambda do zwykłego (z jedną stałą typową).
Najpierw tłumaczymy typy:

$$\begin{array}{rcl} |\alpha| & = & \mathbf{0}, \quad \text{gdy} \;\; \alpha = \bot, p, q, \ldots \\ |\sigma \to \tau| & = & |\sigma| \to |\tau| \\ |\sigma \wedge \tau| & = & (|\sigma| \to |\tau| \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0} \\ |\sigma \vee \tau| & = & (|\sigma| \to \mathbf{0}) \to (|\tau| \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0} \end{array}$$

Uwaga: zawsze $|\sigma| = \sigma_1 \to \cdots \to \sigma_n \to \mathbf{0}$.

Translacja dla termów (1)

$$
\begin{aligned}
|x^\sigma| &= x^{|\sigma|} \\
|\lambda x^\tau . M^\sigma| &= \lambda x^{|\tau|} . |M|^{|\sigma|} \\
|M^{\sigma\to\tau} N^\sigma| &= |M|^{|\sigma|\to|\tau|} |N|^{|\sigma|}
\end{aligned}
$$

Translacja dla termów (1)

$$
\begin{aligned}
|x^\sigma| &= x^{|\sigma|} \\
|\lambda x^\tau.M^\sigma| &= \lambda x^{|\tau|}.\,|M|^{|\sigma|} \\
|M^{\sigma\to\tau}N^\sigma| &= |M|^{|\sigma|\to|\tau|}|N|^{|\sigma|} \\
|\langle M, N\rangle^{\sigma\wedge\tau}| &= \lambda z^{|\sigma|\to|\tau|\to\mathbf{0}}.\,z|M|^{|\sigma|}|N|^{|\tau|}
\end{aligned}
$$

Translacja dla termów (1)

$$
\begin{array}{rcl}
|x^\sigma| & = & x^{|\sigma|} \\
|\lambda x^\tau . M^\sigma| & = & \lambda x^{|\tau|}.\,|M|^{|\sigma|} \\
|M^{\sigma\to\tau} N^\sigma| & = & |M|^{|\sigma|\to|\tau|}|N|^{|\sigma|} \\
|\langle M, N\rangle^{\sigma\wedge\tau}| & = & \lambda z^{|\sigma|\to|\tau|\to\mathbf{0}}.\,z|M|^{|\sigma|}|N|^{|\tau|} \\
|\mathbf{in}_1(A^\sigma)^{\sigma\vee\tau}| & = & \lambda x^{|\sigma|\to\mathbf{0}}.\lambda y^{|\tau|\to\mathbf{0}}.\,x|A|^{|\sigma|} \\
|\mathbf{in}_2(B^\tau)^{\sigma\vee\tau}| & = & \lambda x^{|\sigma|\to\mathbf{0}}.\lambda y^{|\tau|\to\mathbf{0}}.\,y|B|^{|\tau|}
\end{array}
$$

Translacja dla termów (2)

$$(|\sigma| = \sigma_1 \to \cdots \to \sigma_n \to \mathbf{0}, \quad |\tau| = \tau_1 \to \cdots \to \tau_m \to \mathbf{0}.)$$

$$|\sigma \wedge \tau| \;=\; (|\sigma| \to |\tau| \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned} |P^{\sigma\wedge\tau}\{1\}| &= \lambda x_1^{\sigma_1} \ldots \lambda x_n^{\sigma_n}.\, |P|^{|\sigma\wedge\tau|}(\lambda x^{|\sigma|}\lambda y^{|\tau|}.\,(x x_1 \ldots x_n)^{\mathbf{0}}) \\ |P^{\sigma\wedge\tau}\{2\}| &= \lambda x_1^{\tau_1} \ldots \lambda x_m^{\tau_m}.\, |P|^{|\sigma\wedge\tau|}(\lambda x^{|\sigma|}\lambda y^{|\tau|}\,(y x_1 \ldots x_m)^{\mathbf{0}}) \end{aligned}$$

Translacja dla termów (2)

$$(|\sigma| = \sigma_1 \to \cdots \to \sigma_n \to \mathbf{0}, \quad |\tau| = \tau_1 \to \cdots \to \tau_m \to \mathbf{0}.)$$

$$|\sigma \wedge \tau| \; = \; (|\sigma| \to |\tau| \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$$

$$\begin{aligned}
|P^{\sigma\wedge\tau}\{1\}| &= \lambda x_1^{\sigma_1} \ldots \lambda x_n^{\sigma_n}.\, |P|^{|\sigma\wedge\tau|}(\lambda x^{|\sigma|} \lambda y^{|\tau|}.\, (x x_1 \ldots x_n)^{\mathbf{0}}) \\
|P^{\sigma\wedge\tau}\{2\}| &= \lambda x_1^{\tau_1} \ldots \lambda x_m^{\tau_m}.\, |P|^{|\sigma\wedge\tau|}(\lambda x^{|\sigma|} \lambda y^{|\tau|}\, (y x_1 \ldots x_m)^{\mathbf{0}})
\end{aligned}$$

$$|\varepsilon_\sigma(M^\perp)| \; = \; \lambda x_1^{\sigma_1} \ldots \lambda x_n^{\sigma_n}.|M|^{\mathbf{0}}$$

∘

O co tu chodzi?

$M = \langle P, Q \rangle \{1\} \to P$ tłumaczy się tak:

$$
\begin{aligned}
|M| = \lambda x_1^{\sigma_1} \ldots \lambda x_n^{\sigma_n}. (\lambda z. z|P||Q|)(\lambda xy. xx_1 \ldots x_n) \\
\to_\beta \lambda x_1^{\sigma_1} \ldots \lambda x_n^{\sigma_n}. (\lambda xy. xx_1 \ldots x_n)|P||Q| \\
\twoheadrightarrow_\beta \lambda x_1^{\sigma_1} \ldots \lambda x_n^{\sigma_n}. |P| x_1 \ldots x_n \\
\twoheadrightarrow_\eta |P|
\end{aligned}
$$

$\circ$

Translacja dla termów (3)

$$|\mathsf{case}\ M^{\sigma\vee\tau}\ \mathsf{of}\ [x^{\sigma}]P^{\rho}\ \mathsf{or}\ [y^{\tau}]Q^{\rho}| \ =$$

$$\lambda x_1^{\rho_1}\ldots\lambda x_k^{\rho_k}.|M|(\lambda x^{|\sigma|}.|P|^{|\rho|}x_1\ldots x_k)(\lambda y^{|\tau|}.|Q|^{|\rho|}x_1\ldots x_k),$$

gdzie $|M| : (|\sigma| \to \mathbf{0}) \to (|\tau| \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$,

oraz $|\rho| = \rho_1 \to \cdots \to \rho_k \to \mathbf{0}$.

$\circ$

O co tu chodzi?

$M = \textbf{case in}_1\ P^\tau\ \textbf{of}\ [u^\tau]Q^\rho, [v^\sigma]R^\rho \ \to\ Q[u := P]$
tłumaczy się tak:

$$
\begin{aligned}
|M| &= \lambda\vec{x}.\,|\textbf{in}_1\ P|(\lambda u.\,|Q|\,\vec{x})(\lambda v.\,|R|\,\vec{x}) \\
&= \lambda\vec{x}.\,(\lambda xy.\,x|P|)(\lambda u.\,|Q|\,\vec{x})(\lambda v.\,|R|\,\vec{x}) \\
&\twoheadrightarrow \lambda\vec{x}.\,(\lambda u.\,|Q|\,\vec{x})|P| \\
&\twoheadrightarrow \lambda\vec{x}.\,|Q|[u := |P|]\vec{x} \\
&= \lambda\vec{x}.\,|Q[u := P]|\vec{x} \\
&\twoheadrightarrow_\eta |Q[u := P]|
\end{aligned}
$$

∘

Własności translacji

Lemat:

- $|M[x := N]| = |M|[x := |N|]$.
- Jeśli $M : \sigma$, to $|M| : |\sigma|$.
- Jeśli $M \to_\beta M'$, to $|M| \twoheadrightarrow^+_{\beta\eta} |M'|$.

Twierdzenie: *Rozszerzony rachunek lambda ma własność silnej normalizacji ze względu na β-redukcje.*

Dowód: Przypuśćmy, że $M_0^\tau \to M_1^\tau \to M_2^\tau \to \cdots$

Wtedy także $|M_0| \twoheadrightarrow^+_{\beta\eta} |M_1| \twoheadrightarrow^+_{\beta\eta} |M_2| \twoheadrightarrow^+_{\beta\eta} \cdots$

$\circ$

Silna normalizacja

Twierdzenie: *Rozszerzony rachunek lambda ma własność silnej normalizacji ze względu na* β*-redukcje.*

Silna normalizacja

Twierdzenie: *Rozszerzony rachunek lambda ma własność silnej normalizacji ze względu na β-redukcje.*

I co z tego?

Już wiemy, że beta-redukcja to za mało: term w postaci beta-normalnej może np. wyglądać tak:

$$(\textbf{case } N^{\tau\vee\sigma} \textbf{ of } [x^\tau]P^{\alpha\to\beta}, [y^\sigma]Q^{\alpha\to\beta})M^\alpha$$

Silna normalizacja

Twierdzenie: *Rozszerzony rachunek lambda ma własność silnej normalizacji ze względu na β-redukcje.*

I co z tego?

Już wiemy, że beta-redukcja to za mało: term w postaci beta-normalnej może np. wyglądać tak:

$$(\textbf{case}\ N^{\tau\vee\sigma}\ \textbf{of}\ [x^{\tau}]P^{\alpha\to\beta}, [y^{\sigma}]Q^{\alpha\to\beta})M^{\alpha}$$

Potrzebne są dodatkowe redukcje porządkujące (*permutacje*).

Uproszczona składnia

Zamiast **case** M **of** $[x]P$ or $[y]Q$ piszemy $M[x.P, y.Q]$.

Zamiast $\varepsilon_\sigma(M)$ piszemy $M[\sigma]$.

Wada: mniej intuicyjne.

Zaleta: wszystkie eliminacje pisane jednolicie na końcu:

$$MN, \quad M\{i\}, \quad M[x.P, y.Q], \quad M[\sigma].$$

Permutacje

Kłopotliwa sytuacja:
Brzydka eliminacja, a potem znowu eliminacja, czyli

$$M^{\sigma\vee\tau}[x^\sigma.P^\rho, y^\tau.Q^\rho]E \qquad \text{i} \qquad M^\perp[\sigma]E$$

Eliminator E nie ma dostępu do termu „właściwego" typu.

Nie ma własności podformuł,

np. $M^{\sigma\vee\tau}[x^\sigma.P^{\alpha\to\beta}, y^\tau.Q^{\alpha\to\beta}]N^\alpha : \beta$

Permutacje

Kłopotliwa sytuacja:
Brzydka eliminacja, a potem znowu eliminacja, czyli

$$M^{\sigma\vee\tau}[x^\sigma.P^\rho, y^\tau.Q^\rho]E \qquad \text{i} \qquad M^\perp[\sigma]E$$

Eliminator E nie ma dostępu do termu „właściwego'' typu.

Nie ma własności podformuł,

np. $M^{\sigma\vee\tau}[x^\sigma.P^{\alpha\to\beta}, y^\tau.Q^{\alpha\to\beta}]N^\alpha : \beta$

Permutacje:

$$M^{\sigma\vee\tau}[x^\sigma.P^\rho, y^\tau.Q^\rho]E \;\Rightarrow\; M^{\sigma\vee\tau}[x^\sigma.P^\rho E, y^\tau.Q^\rho E]$$
$$(M^\perp[\sigma]E)^\mu \;\Rightarrow\; M^\perp[\mu]$$

Zła wiadomość

Zła wiadomość

Translacja używana dla beta-redukcji nie działa dla permutacji.

(To nie jest wcale takie proste.)

Zła wiadomość

Translacja używana dla beta-redukcji nie działa dla permutacji.

(To nie jest wcale takie proste.)

Użyjemy metody CPS („continuation passing style")

$\circ$

Semantyka kontynuacyjna

Znaczenie wyrażenia = jego wpływ na „cały program”.

$\mathbf{0}$ – typ „całego programu” (typ efektu).

$k : \mathsf{int} \to \mathbf{0}$ – „kontynuacja typu int”

Znaczenie wyrażenia $N : \mathsf{int}$, to funkcja $\underline{N} : (\mathsf{int} \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$.

Semantyka kontynuacyjna

Znaczenie wyrażenia = jego wpływ na „cały program”.

$\mathbf{0}$ – typ „całego programu” (typ efektu).

$k : \mathsf{int} \to \mathbf{0}$ – „kontynuacja typu int”

Znaczenie wyrażenia $N : \mathsf{int}$, to funkcja $\underline{N} : (\mathsf{int} \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$.

Na przykład $\underline{5} = \lambda k^{\mathsf{int} \to \mathbf{0}}.\, k(5)$.

Semantyka kontynuacyjna

Znaczenie wyrażenia = jego wpływ na „cały program".

$\mathbf{0}$ – typ „całego programu" (typ efektu).

$k : \mathsf{int} \to \mathbf{0}$ – „kontynuacja typu int"

Znaczenie wyrażenia $N : \mathsf{int}$, to funkcja $\underline{N} : (\mathsf{int} \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$.

Na przykład $\underline{5} = \lambda k^{\mathsf{int}\to\mathbf{0}}.\, k(5)$.

Ogólniej, dla $: N : \mathsf{int}$,

$\underline{N} = \lambda k^{\mathsf{int}\to\mathbf{0}}.\, N \triangleright k$, gdzie $N \triangleright k$ to „N przekazane do k".

○

Kontynuacje dla funkcji (CBN)

typ termu	sposób użycia	typ kontynuacji	semantyka
τ	$\tau^\bullet$	$\tau^\bullet \to \mathbf{0}$	$\underline{\tau} = (\tau^\bullet \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$
p	p	$p \to \mathbf{0}$	$(p \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$
$\perp$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0} \to \mathbf{0}$	$(\mathbf{0} \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$
$\tau \to \sigma$	$\underline{\tau} \to \underline{\sigma}$	$(\underline{\tau} \to \underline{\sigma}) \to \mathbf{0}$	$((\underline{\tau} \to \underline{\sigma}) \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$

$\circ$

Kontynuacje dla koniunkcji i alternatywy

Naturalny „sposób użycia”:

$$(\tau \wedge \sigma)^\bullet = (\underline{\tau} \wedge \underline{\sigma})$$

$$(\tau \vee \sigma)^\bullet = (\underline{\tau} \vee \underline{\sigma})$$

Kontynuacje dla koniunkcji i alternatywy

Naturalny „sposób użycia”:

$$(\tau \wedge \sigma)^\bullet = (\underline{\tau} \wedge \underline{\sigma})$$

$$(\tau \vee \sigma)^\bullet = (\underline{\tau} \vee \underline{\sigma})$$

Funkcyjny „sposób użycia”:

$$(\tau \wedge \sigma)^\bullet = (\underline{\tau} \to \underline{\sigma} \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$$

$$(\tau \vee \sigma)^\bullet = (\underline{\tau} \to \mathbf{0}) \to (\underline{\sigma} \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$$

Translacja dla typów: $\underline{\tau} = (\tau^\bullet \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$

$$
\begin{array}{rcl}
p^\bullet & = & p \\
\bot^\bullet & = & \mathbf{0} \\
(\tau \to \sigma)^\bullet & = & (\underline{\tau} \to \underline{\sigma}) \\
(\tau \wedge \sigma)^\bullet & = & (\underline{\tau} \to \underline{\sigma} \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0} \\
(\tau \vee \sigma)^\bullet & = & (\underline{\tau} \to \mathbf{0}) \to (\underline{\sigma} \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}
\end{array}
$$

○

Translacja dla termów: czego chcemy?

Dla dowolnego termu M chcielibyśmy zdefiniować $\underline{M}$, tak aby:

- *Jeśli* $\Gamma \vdash M : \tau$, *to* $\underline{\Gamma} \vdash \underline{M} : \underline{\tau}$, *gdzie* $\underline{\Gamma}(x) = \underline{\Gamma(x)}$.

Translacja dla termów: czego chcemy?

Dla dowolnego termu M chcielibyśmy zdefiniować $\underline{M}$, tak aby:

- *Jeśli* $\Gamma \vdash M : \tau$, *to* $\underline{\Gamma} \vdash \underline{M} : \underline{\tau}$, *gdzie* $\underline{\Gamma}(x) = \underline{\Gamma(x)}$.
- *Jeśli* $M \to M'$, *to najlepiej* $\underline{M} \to^{+} \underline{M'} \ldots$

Translacja dla termów: czego chcemy?

Dla dowolnego termu M chcielibyśmy zdefiniować $\underline{M}$, tak aby:

- *Jeśli* $\Gamma \vdash M : \tau$, *to* $\underline{\Gamma} \vdash \underline{M} : \underline{\tau}$, *gdzie* $\underline{\Gamma}(x) = \underline{\Gamma(x)}$.
- *Jeśli* $M \to M'$, *to najlepiej* $\underline{M} \to^+ \underline{M'}$ ...
- *A jak się nie da, to chociaż* $\underline{M} = \underline{M'}$.

I to się prawie da zrobić.

Translacja dla termów: $\underline{M} = \lambda k^{\tau^{\bullet}\to\mathbf{0}}.\, M \triangleright k$

$$
\begin{array}{rcl}
x^{\tau} \triangleright K & = & x^{\underline{\tau}}(K) \\[1ex]
(\lambda x^{\sigma}.\, M^{\mu}) \triangleright K & = & K(\lambda x^{\underline{\sigma}}.\, \underline{M}^{\underline{\mu}}) \\[1ex]
\langle M^{\sigma}, N^{\mu}\rangle \triangleright K & = & K(\lambda z^{\underline{\mu}\to\underline{\sigma}\to\mathbf{0}}.\, z\underline{M}\,\underline{N}) \\[1ex]
\mathrm{in}_1(M) \triangleright K & = & K(\lambda y^{\underline{\mu}\to\mathbf{0}} z^{\underline{\sigma}\to\mathbf{0}}.\, y\underline{M}) \\[1ex]
(N^{\rho} E)^{\tau} \triangleright K & = & N \triangleright (E@K)
\end{array}
$$

$E@K : \rho^{\bullet} \to \mathbf{0}$ to eliminator E włączony do kontynuacji K.

Dołączanie eliminatora do kontynuacji $K : \tau^\bullet \to \mathbf{0}$

Ma być tak:

$(M^\rho E)^\tau \triangleright K = M \triangleright (E @ K)$

Przypadek aplikacji: $\rho = \sigma \to \tau$.

$(M^{\sigma\to\tau} N^\sigma)^\tau \triangleright K = M \triangleright (N @ K)$

$N^\sigma @ K = \lambda m^{\underline{\sigma}\to\underline{\tau}}.\, m\underline{N}K : (\sigma \to \tau)^\bullet \to \mathbf{0}$

Tutaj $K : \tau^\bullet \to \mathbf{0}$ jest kontynuacją dla $MN : \tau$.

$N @ K : (\underline{\sigma} \to \underline{\tau}) \to \mathbf{0}$ jest kontynuacją dla $M : \sigma \to \tau$.

Dołączanie eliminatora do kontynuacji $K : \tau^\bullet \to \mathbf{0}$

$$
\begin{aligned}
N@K &= \lambda m^{\underline{\sigma}\to\underline{\tau}}.\, m\underline{N}K : (\tau \to \sigma)^\bullet \to \mathbf{0} \\
\{2\}@K &= \lambda m^{(\underline{\sigma}\to\underline{\tau}\to\mathbf{0})\to\mathbf{0}}.\, m(\lambda x^{\underline{\tau}} y^{\underline{\sigma}}.\, yK) : (\tau \wedge \sigma)^\bullet \to \mathbf{0} \\
[x^\mu.S^\tau, y^\rho.T^\tau]@K &= \lambda m^{(\mu\vee\rho)^\bullet}.\, m(\lambda x^{\underline{\mu}}.\, S \triangleright K)(\lambda y^{\underline{\rho}}.\, T \triangleright K) \\
[\rho]@K &= (\lambda k m^{\mathbf{0}}.\, m)K : \mathbf{0} \to \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$$(\mu \vee \sigma)^\bullet = (\underline{\mu} \to \mathbf{0}) \to (\underline{\sigma} \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$$

Własności translacji

- *Jeśli* $\Gamma \vdash M : \tau$, *to* $\underline{\Gamma} \vdash \underline{M} : \underline{\tau}$, *gdzie* $\underline{\Gamma}(x) = \underline{\Gamma(x)}$.

Własności translacji

- *Jeśli* $\Gamma \vdash M : \tau$*, to* $\underline{\Gamma} \vdash \underline{M} : \underline{\tau}$*,* *gdzie* $\underline{\Gamma}(x) = \underline{\Gamma(x)}$*.*
- $(M \triangleright K)[x^{\underline{\sigma}} := \underline{N}] \twoheadrightarrow_\beta M[x^{\sigma} := N] \triangleright K[x^{\underline{\sigma}} := \underline{N}]$.

Własności translacji

- *Jeśli* $\Gamma \vdash M : \tau$, *to* $\underline{\Gamma} \vdash \underline{M} : \underline{\tau}$, *gdzie* $\underline{\Gamma}(x) = \underline{\Gamma(x)}$.
- $(M \triangleright K)[x^{\underline{\sigma}} := \underline{N}] \twoheadrightarrow_\beta M[x^\sigma := N] \triangleright K[x^{\underline{\sigma}} := \underline{N}]$.
- *Jeśli* $M \to_\beta M'$, *to* $\underline{M} \twoheadrightarrow_\beta^+ \underline{M'}$.

Własności translacji

- *Jeśli* $\Gamma \vdash M : \tau$, *to* $\underline{\Gamma} \vdash \underline{M} : \underline{\tau}$, *gdzie* $\underline{\Gamma}(x) = \underline{\Gamma(x)}$.
- $(M \triangleright K)[x^{\underline{\sigma}} := \underline{N}] \twoheadrightarrow_\beta M[x^\sigma := N] \triangleright K[x^{\underline{\sigma}} := \underline{N}]$.
- *Jeśli* $M \to_\beta M'$, *to* $\underline{M} \twoheadrightarrow_\beta^+ \underline{M'}$.
- *Niech* $\to_\pi$ *oznacza permutacje postaci* $N[x.S, y.T]E \to_\pi N[x.SE, y.TE]$.

  Jeśli $M \to_\pi M'$, *to* $\underline{M} = \underline{M'}$.

Jeśli $M \to_\beta M'$, to $\underline{M} \twoheadrightarrow_\beta^+ \underline{M'}$. Na przykład:

$$
\begin{aligned}
\underline{\langle P, Q\rangle\{1\}} &= \lambda k.\, \langle P, Q\rangle\{1\} \triangleright k \\
&= \lambda k.\, \langle P, Q\rangle \triangleright \{1\}@k \\
&= \lambda k.\, \langle P, Q\rangle \triangleright (\lambda m.\, m(\lambda xy.xk)) \\
&= \lambda k.\, (\lambda m.\, m(\lambda xy.xk))(\lambda z.\, z\underline{P}\,\underline{Q}) \\
&\to_\beta \lambda k.\, (\lambda z.\, z\underline{P}\,\underline{Q})(\lambda xy.xk) \\
&\to_\beta \lambda k.\, (\lambda xy.xk)\underline{P}\,\underline{Q} \\
&\twoheadrightarrow_\beta^+ \lambda k.\, \underline{P}k = \lambda k.\, (\lambda k.\, P \triangleright k)k \\
&\to_\beta \lambda k.\, P \triangleright k = \underline{P}
\end{aligned}
$$

$\circ$

Jeśli $M \to_\pi M'$, to $\underline{M} = \underline{M'}$.

$$
\begin{aligned}
\underline{M[x.S, y.T]E} &= \lambda k.\, M[x.S, y.T]E \triangleright k \\
&= \lambda k.\, M[x.S, y.T] \triangleright E@k \\
&= \lambda k.\, M \triangleright [x.S, y.T]@E@k \\
&= \lambda k.\, M \triangleright (\lambda m.\, m(\lambda x.\, S \triangleright E@k)(\lambda y.\, T \triangleright E@k)) \\
&= \lambda k.\, M \triangleright (\lambda m.\, m(\lambda x.\, SE \triangleright k)(\lambda y.\, TE \triangleright k)) \\
&= \lambda k.\, M \triangleright [x.SE, y.TE]@k \\
&= \lambda k.\, M[x.SE, y.TE] \triangleright k = \underline{M[x.SE, y.TE]}
\end{aligned}
$$

$\circ$

Zła wiadomość

Translacja nie zachowuje permutacji postaci

$$M[\sigma]E^{\rho} \to_{\perp} M[\rho].$$

Zła wiadomość

Translacja nie zachowuje permutacji postaci

$$M[\sigma]E^{\rho} \to_{\perp} M[\rho].$$

Bo tak: $\underline{x^{\perp}[\sigma]E^{\rho}} = \lambda k.\, x^{\perp}[\sigma]E^{\rho} \triangleright k,$

$= \lambda k.\, x^{\perp} \triangleright [\sigma]@E^{\rho}@k = \lambda k.\, x^{\underline{\mathbf{0}}}((\lambda lm.m)(E^{\rho}@k)).$

oraz $\underline{x^{\perp}[\rho]} = \lambda k.\, x^{\perp}[\rho] \triangleright k = \lambda k.\, x^{\underline{\mathbf{0}}}((\lambda lm.m)k)$

Zagadka

Translacja nie zachowuje permutacji postaci

$$M[\sigma]E^{\rho} \to_{\perp} M[\rho].$$

Ale ten problem znika jeśli zamienić definicję

$[\sigma]@K = (\lambda k m^{\mathbf{0}}.\, m)K : \mathbf{0} \to \mathbf{0}$

na prostszą:

$[\sigma]@K = \lambda m^{\mathbf{0}}.\, m$

To czemu tak nie robimy?

Zła wiadomość

Translacja nie zachowuje permutacji postaci

$$M[\sigma]E^{\rho} \to_{\perp} M[\rho].$$

Zła wiadomość

Translacja nie zachowuje permutacji postaci

$$M[\sigma]E^{\rho} \to_{\perp} M[\rho].$$

Rozwiązanie: Odkładanie epsilona.

Jeśli $M \twoheadrightarrow_{\perp} N \to_{\beta\pi} P$, *to* $M \to_{\beta\pi} Q \twoheadrightarrow_{\perp} P$, *dla pewnego* Q.

Zła wiadomość

Translacja nie zachowuje permutacji postaci

$$M[\sigma]E^\rho \to_\perp M[\rho].$$

Rozwiązanie: Odkładanie epsilona.

Jeśli $M \twoheadrightarrow_\perp N \to_{\beta\pi} P$, *to* $M \to_{\beta\pi} Q \twoheadrightarrow_\perp P$, *dla pewnego* Q.

Morał: Jeśli istnieje redukcja

$$M_1 \to M_2 \to M_3 \to \cdots$$

w której kroki $\to_{\beta\pi}$ występują nieskończenie wiele razy,
to istnieje nieskończona $\beta\pi$-redukcja.

Silna normalizacja

Wystarczy udowodnić, że nie istnieje nieskończona $\beta\pi$-redukcja ani nieskończona $\perp$-redukcja.

Silna normalizacja

Wystarczy udowodnić, że nie istnieje nieskończona $\beta\pi$-redukcja ani nieskończona $\perp$-redukcja.

Lemat: *Nie istnieje nieskończona redukcja z samych permutacji (czyli $\perp\pi$-redukcja).*

Silna normalizacja

Wystarczy udowodnić, że nie istnieje nieskończona $\beta\pi$-redukcja ani nieskończona $\perp$-redukcja.

Lemat: *Nie istnieje nieskończona redukcja z samych permutacji (czyli $\perp\pi$-redukcja).*

Dowód: Permutacje przesuwają eliminatory w głąb termu, z grubsza tak: $NE_1E_2 \to NE_1^{E_2}$. Można zdefiniować „miarę termu", której wartość zmniejsza się po każdej permutacji. Np. jeśli $|NE| = |N|^2|E|$, to

$$|NE_1E_2| = (|N|^2|E_1|)^2|E_2| > |N|^2|E_1^{E_2}| = |NE_1^{E_2}|$$

$\circ$

Silna normalizacja

Przypuśćmy, że w rozszerzonym rachunku lambda:

$$M_1 \to_{\pi\beta} M_2 \to_{\pi\beta} M_3 \to_{\pi\beta} M_4 \to_{\pi\beta} \cdots$$

Silna normalizacja

Przypuśćmy, że w rozszerzonym rachunku lambda:

$$M_1 \to_{\pi\beta} M_2 \to_{\pi\beta} M_3 \to_{\pi\beta} M_4 \to_{\pi\beta} \cdots$$

Wtedy w zwykłym rachunku lambda:

$$\underline{M_1} \;\leadsto\; \underline{M_2} \;\leadsto\; \underline{M_3} \;\leadsto\; \underline{M_4} \;\leadsto\; \cdots$$

gdzie każde $\leadsto$, to albo $\twoheadrightarrow^+_\beta$, albo $=$.
Równośc zachodzi w przypadku permutacji.

Silna normalizacja

Przypuśćmy, że w rozszerzonym rachunku lambda:

$$M_1 \to_{\pi\beta} M_2 \to_{\pi\beta} M_3 \to_{\pi\beta} M_4 \to_{\pi\beta} \cdots$$

Wtedy w zwykłym rachunku lambda:

$$\underline{M_1} \ \rightsquigarrow \ \underline{M_2} \ \rightsquigarrow \ \underline{M_3} \ \rightsquigarrow \ \underline{M_4} \ \rightsquigarrow \ \cdots$$

gdzie każde $\rightsquigarrow$, to albo $\twoheadrightarrow_\beta^+$, albo $=$.
Równośc zachodzi w przypadku permutacji.

Jeśli w górnej redukcji jest nieskończenie wiele β-kroków, to w dolnej też. Niemożliwe, bo SN_β.

Silna normalizacja

Przypuśćmy, że w rozszerzonym rachunku lambda:

$$M_1 \to_{\pi\beta} M_2 \to_{\pi\beta} M_3 \to_{\pi\beta} M_4 \to_{\pi\beta} \cdots$$

Wtedy w zwykłym rachunku lambda:

$$\underline{M_1} \;\rightsquigarrow\; \underline{M_2} \;\rightsquigarrow\; \underline{M_3} \;\rightsquigarrow\; \underline{M_4} \;\rightsquigarrow\; \cdots$$

gdzie każde $\rightsquigarrow$, to albo $\twoheadrightarrow_\beta^+$, albo $=$.
Równośc zachodzi w przypadku permutacji.

Jeśli w górnej redukcji jest nieskończenie wiele β-kroków, to w dolnej też. Niemożliwe, bo SN_β.

Zatem w górnej redukcji są prawie same permutacje.
Też niemożliwe, bo lemat.

Morał:

Twierdzenie (Philippe de Groote)

Rozszerzony rachunek lambda z permutacjami ma własność silnej normalizacji.

Wniosek: *Każdy dowód można zredukować do normalnego.*

∘

Sens logiczny translacji CPS?

$$\underline{\tau} = (\tau^{\bullet} \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$$

$$\begin{array}{rcl}
p^{\bullet} & = & p \\
\bot^{\bullet} & = & \mathbf{0} \\
(\tau \to \sigma)^{\bullet} & = & (\underline{\tau} \to \underline{\sigma}) \\
(\tau \wedge \sigma)^{\bullet} & = & (\underline{\tau} \to \underline{\sigma} \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0} \\
(\tau \vee \sigma)^{\bullet} & = & (\underline{\tau} \to \mathbf{0}) \to (\underline{\sigma} \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}
\end{array}$$

∘

Sens logiczny translacji CPS?

$$\underline{\tau} = (\tau^{\bullet} \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$$

Sens logiczny translacji CPS?

$$\underline{\tau} = (\tau^\bullet \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$$

Twierdzenie: *Jeśli* $\Gamma \vdash M : \tau$*, to* $\underline{\Gamma} \vdash \underline{M} : \underline{\tau}$*.*

W szczególności, jeśli τ *jest twierdzeniem, to* $\underline{\tau}$ *też.*

Sens logiczny translacji CPS?

$$\underline{\tau} = (\tau^\bullet \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$$

Twierdzenie: *Jeśli* $\Gamma \vdash M : \tau$, *to* $\underline{\Gamma} \vdash \underline{M} : \underline{\tau}$.

W szczególności, jeśli τ *jest twierdzeniem, to* $\underline{\tau}$ *też.*

A na odwrót?

Sens logiczny translacji CPS?

$$\underline{\tau} = (\tau^{\bullet} \to \mathbf{0}) \to \mathbf{0}$$

Twierdzenie: *Jeśli* $\Gamma \vdash M : \tau$, *to* $\underline{\Gamma} \vdash \underline{M} : \underline{\tau}$.

W szczególności, jeśli τ *jest twierdzeniem, to* $\underline{\tau}$ *też.*

A na odwrót? **Nie!**

Przykład: $\vdash \underline{p \vee (p \to q)}$, $\nvdash p \vee (p \to q)$

Przykład: $\vdash \underline{p \vee (p \to q)}$, $\quad \nvdash p \vee (p \to q)$

Oznaczenie: $\sim\alpha = \alpha \to \mathbf{0}$.
Podobieństwo do $\neg\alpha = \alpha \to \bot$ jest zamierzone.

Przykład: $\vdash \underline{p \vee (p \to q)}$, $\nvdash p \vee (p \to q)$

Oznaczenie: $\sim\alpha = \alpha \to \mathbf{0}$.
Podobieństwo do $\neg\alpha = \alpha \to \bot$ jest zamierzone.

Liczymy:

$\underline{p \vee (p \to q)} = \sim\sim(\sim\underline{p} \to \sim(\underline{p \to q}) \to \mathbf{0})$.

Przykład: $\vdash \underline{p \vee (p \to q)}$, $\nvdash p \vee (p \to q)$

Oznaczenie: $\sim\alpha = \alpha \to \mathbf{0}$.
Podobieństwo do $\neg\alpha = \alpha \to \bot$ jest zamierzone.

Liczymy:

$$\underline{p \vee (p \to q)} = \sim\sim(\sim\underline{p} \to \sim(\underline{p \to q}) \to \mathbf{0}).$$

$$\sim\underline{p} = \sim\sim\sim p, \qquad \underline{p \to q} = \sim\sim p \to \sim\sim q.$$

Przykład: $\vdash \underline{p \vee (p \to q)}$, $\quad \nvdash p \vee (p \to q)$

Oznaczenie: $\sim\alpha = \alpha \to \mathbf{0}$.
Podobieństwo do $\neg\alpha = \alpha \to \bot$ jest zamierzone.

Liczymy:

$$\underline{p \vee (p \to q)} = \sim\sim(\sim\underline{p} \to \sim(\underline{p \to q}) \to \mathbf{0}).$$

$$\sim\underline{p} = \sim\sim\sim p, \qquad \underline{p \to q} = \sim\sim p \to \sim\sim q.$$

Zatem $\underline{p \vee (p \to q)}$ jest równoważne formule:

$$\sim\sim(\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0}).$$

$$\vdash {\sim}{\sim}({\sim}p \to {\sim}({\sim}{\sim}p \to {\sim}{\sim}q) \to \mathbf{0})$$

$$\vdash \sim\sim(\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0})$$

Założenie $x : \sim(\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0})$, teza $\mathbf{0}$.

$\vdash \sim\sim(\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0})$

Założenie $x : \sim(\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0})$, teza $\mathbf{0}$.

Cel: $\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0}$,

$\vdash \sim\sim(\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0})$

Założenie $x : \sim(\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0})$, teza $\mathbf{0}$.

Cel: $\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0}$, czyli:

założenia $y : \sim p$, $z : \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q)$, teza $\mathbf{0}$.

$\vdash \sim\sim(\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0})$

Założenie $x : \sim(\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0})$, teza $\mathbf{0}$.

Cel: $\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0}$, czyli:

założenia $y : \sim p$, $z : \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q)$, teza $\mathbf{0}$.

Cel: $\sim\sim p \to \sim\sim q$,

$\vdash \sim\sim(\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0})$

Założenie $x : \sim(\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0})$, teza $\mathbf{0}$.

Cel: $\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0}$, czyli:

założenia $y : \sim p$, $z : \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q)$, teza $\mathbf{0}$.

Cel: $\sim\sim p \to \sim\sim q$, czyli:

założenia $u : \sim\sim p$, $v : \sim q$, teza $\mathbf{0}$.

$\vdash \sim\sim(\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0})$

Założenie $x : \sim(\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0})$, teza $\mathbf{0}$.

Cel: $\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0}$, czyli:

założenia $y : \sim p$, $z : \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q)$, teza $\mathbf{0}$.

Cel: $\sim\sim p \to \sim\sim q$, czyli:

założenia $u : \sim\sim p$, $v : \sim q$, teza $\mathbf{0}$.

Wystarczy uy.

$\vdash \sim\sim(\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0})$

Założenie $x : \sim(\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0})$, teza $\mathbf{0}$.

Cel: $\sim p \to \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \mathbf{0}$, czyli:

założenia $y : \sim p$, $z : \sim(\sim\sim p \to \sim\sim q)$, teza $\mathbf{0}$.

Cel: $\sim\sim p \to \sim\sim q$, czyli:

założenia $u : \sim\sim p$, $v : \sim q$, teza $\mathbf{0}$.

Wystarczy uy.

Cały term: $\lambda x.\, x(\lambda yz.\, z(\lambda uv.\, uy))$.

$\circ$

Jeszcze jeden przykład

Jeszcze jeden przykład

Translacją formuły $((p \to q) \to p) \to p$
jest intuicjonistyczne twierdzenie:

$\sim\sim(\sim\sim(\sim\sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \sim\sim p) \to \sim\sim p)$

Jeszcze jeden przykład

Translacją formuły $((p \to q) \to p) \to p$
jest intuicjonistyczne twierdzenie:

$\sim\sim(\sim\sim(\sim\sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \sim\sim p) \to \sim\sim p)$

Chyba odkryliśmy jakąś nową logikę?

Jeszcze jeden przykład

Translacją formuły $((p \to q) \to p) \to p$
jest intuicjonistyczne twierdzenie:

$\sim\sim(\sim\sim(\sim\sim(\sim\sim p \to \sim\sim q) \to \sim\sim p) \to \sim\sim p)$

Chyba odkryliśmy jakąś nową logikę?

Klasyczną

Nienaturalna dedukcja

Nienaturalna dedukcja

Reguły wnioskowania jak zwykle, i do tego:

$$\frac{\Gamma, \neg A \ \vdash \ \bot}{\Gamma \ \vdash \ A} \ (\text{Cheat})$$

∘

Translacja Kołmogorowa

$$\begin{array}{rcl} k(p) & = & \neg\neg p \\ k(\bot) & = & \bot \\ k(\tau \to \sigma) & = & \neg\neg(k(\tau) \to k(\sigma)) \end{array}$$

Analogicznie:

$$k(\tau \diamond \sigma) \;=\; \neg\neg(k(\tau) \diamond k(\sigma))$$

Note: $\neg\neg k(\alpha)$ is equivalent to $k(\alpha)$.

Dygresja (ćwiczenie)

- $\neg(p \to q \to \bot) \leftrightarrow \neg\neg(p \wedge q)$;
- $(\neg p \to \neg q \to \bot) \leftrightarrow \neg\neg(p \vee q)$.

Wniosek: można równie dobrze zdefiniować $k(\tau) = \underline{\tau}$.

∘

Translacja Kołmogorowa

Twierdzenie:

$$\Gamma \vdash_{klas} \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad k(\Gamma) \vdash_{int} k(\alpha).$$

Dowód:

($\Rightarrow$) Indukcja ze względu na dowód.

($\Leftarrow$) Formuły α i $k(\alpha)$ są klasycznie równoważne.

Translacja Kołmogorowa

Twierdzenie:

$$\Gamma \vdash_{klas} \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad k(\Gamma) \vdash_{int} k(\alpha).$$

Dowód:

($\Rightarrow$) Indukcja ze względu na dowód.

($\Leftarrow$) Formuły α i $k(\alpha)$ są klasycznie równoważne.

Morał: Logika klasyczna redukuje się w pamięci logarytmicznej do logiki intuicjonistycznej (jest „łatwiejsza”).

Uwaga: To działa nie tylko dla rachunku zdań.

Translacja Kołmogorowa

Twierdzenie:

$$\Gamma \vdash_{klas} \alpha \qquad \Leftrightarrow \qquad k(\Gamma) \vdash_{min} k(\alpha),$$

gdzie $\vdash_{min}$ oznacza wnioskowanie w *logice minimalnej*,
tj. bez reguły *ex falso*. Zamiast $\perp$ może być cokolwiek.

∘

O wyższości Kołmogorowa nad Gliwienką

Twierdzenie Gliwienki: *Formuła* φ *jest klasyczną tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy* $\vdash_{int} \neg\neg\varphi$

O wyższości Kołmogorowa nad Gliwienką

Twierdzenie Gliwienki: *Formuła* φ *jest klasyczną tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy* $\vdash_{int} \neg\neg\varphi$

- Tu potrzebne jest *ex falso*.
- To nieprawda np. dla logiki 1 rzędu.

∘