Logika i teoria typów

Wykład 2

26 października 2020

Typy proste

(Turbo-powtórzenie)

Curry style: simple type assignment

Typy proste: formuły zdaniowe z samą implikacją.

Otoczenie: zbiór deklaracji postaci $(x : \tau)$

$$\Gamma\,(x : \sigma) \vdash x : \sigma \ \text{(Var)}$$

$$\frac{\Gamma(x : \sigma) \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x\, M : \sigma \to \tau} \ \text{(Abs)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau} \ \text{(App)}$$

Przykłady

- $x : p \to q \to r,\ y : p \to q,\ z : p \ \vdash\ xz(yz) : r$;
- $\vdash\ \lambda xyz.\, xz(yz) : (p \to q \to r) \to (p \to q) \to\ p \to r$;
- $\lambda xy.\, x : p \to q \to p$;
- $\lambda xy.\, x : \tau \to \sigma \to \tau$;
- $\mathbf{2} : (\tau \to \tau) \to \tau \to \tau$;
- $\nvdash\ \lambda x.\, xx : \tau$, dla każdego τ.

Subject Reduction

Theorem:

If $\Gamma \vdash M : \tau$ *and* $M \rightarrow_{\beta\eta} N$ *then* $\Gamma \vdash N : \tau$.

Silna normalizacja

Twierdzenie:

Jeśli $\Gamma \vdash M : \tau$*, to term* M *jest silnie normalizowalny.*

$\circ$

Non-orthodox Church

Type-assignment with type annotations on bound variables.

$$\Gamma\,(x : \sigma) \vdash x : \sigma \ \text{(Var)}$$

$$\frac{\Gamma(x : \sigma) \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x{:}\sigma\, M : \sigma \to \tau} \ \text{(Abs)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau} \ \text{(App)}$$

Fact: If $\Gamma \vdash M : \tau$ and $\Gamma \vdash M : \sigma$ then $\tau = \sigma$.

Informal type annotations

Typable Curry style terms can be informally annotated by types, e.g. $((\lambda x^\sigma . N^\tau)^{\sigma\to\tau} P^\sigma)^\tau$. Such annotations represent type derivations and can be identified with Church-style terms.

In many cases it does not matter if we consider Curry style or Church style, orthodox or not. We always choose what is the most convenient formulation.

N.B. Coq is non-orthodox Church

Reguły wnioskowania dla rachunku zdań (1)

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\,(\mathrm{Ax})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,(\mathrm{W}\wedge) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\,(\mathrm{E}\wedge) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\,(\mathrm{E}\wedge)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}\,(\mathrm{E} \to) \qquad \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\,(\mathrm{W} \to)$$

$\circ$

Reguły wnioskowania dla rachunku zdań (2)

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\,(\mathrm{W}\vee) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\,(\mathrm{W}\vee)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\,(\mathrm{E}\vee)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,(\mathrm{W}\neg) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\,(\mathrm{E}\neg)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,(\mathrm{E}\bot)$$

Natural Deduction: proste własności

- **Osłabianie (weakening):**

  Jeśli $\Gamma \vdash \varphi$ *oraz* $\Gamma \subseteq \Delta$, *to* $\Delta \vdash \varphi$.

Natural Deduction: proste własności

- **Osłabianie (weakening):**

  Jeśli $\Gamma \vdash \varphi$ *oraz* $\Gamma \subseteq \Delta$*, to* $\Delta \vdash \varphi$ *.*

- **Podstawianie (substitution):**

  Jeśli $\Gamma \vdash \varphi$*, to* $\Gamma[p := \psi] \vdash \varphi[p := \psi]$*.*

Dowód: Indukcja ze względu na dowód.

∘

Rozszerzony rachunek λ: fałsz i koniunkcja

$$\frac{\Gamma \vdash M : \bot}{\Gamma \vdash M[\sigma] : \sigma}$$

Write also $\varepsilon_\sigma(M)$ for $M[\sigma]$.

$$\frac{\Gamma \vdash M : \alpha \quad \Gamma \vdash N : \beta}{\Gamma \vdash \langle M, N \rangle : \alpha \wedge \beta} \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \alpha_1 \wedge \alpha_2}{\Gamma \vdash M\{i\} : \alpha_i}$$

Koniunkcja to iloczyn kartezjański. Fałsz to typ pusty.

Alternatywa to suma prosta

$$\frac{\Gamma \vdash M : \alpha_i}{\Gamma \vdash \mathrm{in}_i(M) : \alpha_1 \vee \alpha_2}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \alpha \vee \beta \quad \Gamma, u{:}\alpha \vdash R : \tau \quad \Gamma, v{:}\beta \vdash Q : \tau}{\Gamma \vdash M[u.R, v.Q] : \ \tau}$$

Write also **case** M **of** $[u]R$ or $[v]Q$ for $M[u.R, v.Q]$

Uwaga:

Notacja $\mathrm{in}_i(M)$ jest niejednoznaczna. Powinno być np. $\mathrm{in}_i^{\alpha_1 \vee \alpha_2}(M)$.

Beta-redukcja

Beta-redeks to eliminacja spójnika zastosowana bezpośrednio po jego wprowadzeniu. *Beta-redukcja* to „upraszcza":

$(\to)$ $(\lambda x^\tau\, M^\sigma) N^\tau \implies M[x := N] : \sigma.$

$(\wedge)$ $\langle M^\tau, N^\sigma \rangle\{1\} \implies M : \tau, \qquad \langle M^\tau, N^\sigma \rangle\{2\} \implies N : \sigma.$

$$(\vee)\ \begin{array}{l} \textbf{case in}_1\,(P^\tau)\ \textbf{of}\ [x^\tau]M^\rho, [y^\sigma]N^\rho \implies M[x := P] : \rho \\ \textbf{case in}_2\,(Q^\sigma)\ \textbf{of}\ [x^\tau]M^\rho, [y^\sigma]N^\rho \implies N[y := Q] : \rho. \end{array}$$

$\circ$

Curry-Howard Isomorphism

A propositional formula α is an intuitionistic theorem iff there exists a closed term of type α (type α is nonempty).

"Propositions-as-Types"

- Formula = type = specification.
- Proof = program = implementation.
- Proof normalization = computation.

Przykłady

$$x : \neg p \vdash \lambda y^{p \wedge q}\, x(y\{1\}) : \neg(p \wedge q);$$

Przykłady

$$x : \neg p \vdash \lambda y^{p \wedge q}\, x(y\{1\}) : \neg(p \wedge q);$$

$$x : p \to \neg q, y : \neg p \to \neg q \vdash \lambda z^{q}.\, y(\lambda u^{p}.\, xuz)z : \neg q.$$

$$x : \neg p \wedge \neg q \vdash \lambda y^{p \vee q}.\, \mathsf{case}\ y\ \mathsf{of}\ [u]x\{1\}u\ \mathsf{or}\ [v]x\{2\}v : \neg(p \vee q)$$

$$x : \neg(p \vee q) \vdash \langle \lambda y^{p}.\, x(\mathsf{in}_1(y)), \lambda z^{q}.\, x(\mathsf{in}_2(z)) \rangle : \neg p \wedge \neg q.$$

Hilbert-style proofs

Many axioms – few rules

Assume a (recursively enumerable) set of axioms.

Definition: A *proof* of ψ from Γ is a sequence of formulas $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, such that $\psi_n = \psi$ and, for all $i = 1, \ldots, n$,

- either ψ_i is an axiom, or $\psi_i \in \Gamma$, or
- there are $j, \ell < i$ such that $\psi_j = \psi_\ell \to \psi_i$ (ψ_i is obtained from ψ_j and ψ_ℓ using *modus ponens*).

∘

Possible axiom schemes for implicational IPC

All formulas of the following form are axioms:

(K) $\varphi \to \psi \to \varphi$;

(S) $(\varphi \to \psi \to \vartheta) \to (\varphi \to \psi) \to \varphi \to \vartheta$.

Possible axiom schemes for implicational IPC

All formulas of the following form are axioms:

(K) $\varphi \to \psi \to \varphi$;
(S) $(\varphi \to \psi \to \vartheta) \to (\varphi \to \psi) \to \varphi \to \vartheta$.

Add the scheme $((\varphi \to \psi) \to \varphi) \to \varphi$ for classical logic.

Example proof

1. $(\varphi \to (\psi \to \varphi) \to \varphi) \to (\varphi \to \psi \to \varphi) \to \varphi \to \varphi$;
2. $\varphi \to (\psi \to \varphi) \to \varphi$;
3. $(\varphi \to \psi \to \varphi) \to \varphi \to \varphi$ (detach 2 from 1);
4. $\varphi \to \psi \to \varphi$;
5. $\varphi \to \varphi$ (detach 4 from 3).

Example proof

1. $(\varphi \to (\psi \to \varphi) \to \varphi) \to (\varphi \to \psi \to \varphi) \to \varphi \to \varphi$;
2. $\varphi \to (\psi \to \varphi) \to \varphi$;
3. $(\varphi \to \psi \to \varphi) \to \varphi \to \varphi$ (detach 2 from 1);
4. $\varphi \to \psi \to \varphi$;
5. $\varphi \to \varphi$ (detach 4 from 3).

Curry-Howard: proofs are typed combinators.

A fundamental property: the deduction theorem

Theorem: $\Gamma, \varphi \vdash_H \psi$ iff $\Gamma \vdash_H \varphi \to \psi$.

A fundamental property: the deduction theorem

Theorem: $\Gamma, \varphi \vdash_H \psi$ iff $\Gamma \vdash_H \varphi \to \psi$.

Proof: ($\Leftarrow$) Immediate use of modus ponens.

A fundamental property: the deduction theorem

Theorem: $\Gamma, \varphi \vdash_H \psi$ iff $\Gamma \vdash_H \varphi \to \psi$.

Proof: ($\Leftarrow$) Immediate use of modus ponens.

($\Rightarrow$) Induction wrt proofs of ψ from Γ, φ.

A fundamental property: the deduction theorem

Theorem: $\Gamma, \varphi \vdash_H \psi$ iff $\Gamma \vdash_H \varphi \to \psi$.

Proof: ($\Leftarrow$) Immediate use of modus ponens.

($\Rightarrow$) Induction wrt proofs of ψ from Γ, φ.

Case 1: If $\psi \in \Gamma$, or ψ is an axiom, we detach ψ from the axiom $\psi \to \varphi \to \psi$.

A fundamental property: the deduction theorem

Theorem: $\Gamma, \varphi \vdash_H \psi$ iff $\Gamma \vdash_H \varphi \to \psi$.

Proof: ($\Leftarrow$) Immediate use of modus ponens.

($\Rightarrow$) Induction wrt proofs of ψ from Γ, φ.

Case 1: If $\psi \in \Gamma$, or ψ is an axiom, we detach ψ from the axiom $\psi \to \varphi \to \psi$.

Case 1^+: One can do the same if φ not used in proof.

A fundamental property: the deduction theorem

Theorem: $\Gamma, \varphi \vdash_H \psi$ iff $\Gamma \vdash_H \varphi \to \psi$.

Proof: ($\Leftarrow$) Immediate use of modus ponens.

($\Rightarrow$) Induction wrt proofs of ψ from Γ, φ.

Case 1: If $\psi \in \Gamma$, or ψ is an axiom, we detach ψ from the axiom $\psi \to \varphi \to \psi$.

Case 1^+: One can do the same if φ not used in proof.

Case 2: If $\psi = \varphi$ we use the example proof of $\varphi \to \varphi$.

A fundamental property: the deduction theorem

Theorem: $\Gamma, \varphi \vdash_H \psi$ iff $\Gamma \vdash_H \varphi \to \psi$.

Proof: ($\Leftarrow$) Immediate use of modus ponens.

($\Rightarrow$) Induction wrt proofs of ψ from Γ, φ.

Case 1: If $\psi \in \Gamma$, or ψ is an axiom, we detach ψ from the axiom $\psi \to \varphi \to \psi$.

Case 1^+: One can do the same if φ not used in proof.

Case 2: If $\psi = \varphi$ we use the example proof of $\varphi \to \varphi$.

Case 3: If ψ obtained from α and $\alpha \to \psi$, apply induction. There are proofs of $\varphi \to \alpha$ and $\varphi \to (\alpha \to \psi)$ from Γ. Detach those from axiom (S).

◦

Deduction theorem $\Leftrightarrow$ combinatory abstraction

$$\Gamma, x : \varphi \vdash M : \psi \quad \text{iff} \quad \Gamma \vdash \lambda^* x.\, M : \varphi \to \psi.$$

Deduction theorem $\Leftrightarrow$ combinatory abstraction

$$\Gamma, x : \varphi \vdash M : \psi \quad \text{iff} \quad \Gamma \vdash \lambda^* x.\, M : \varphi \to \psi.$$

Case 1: If $\psi \in \Gamma$, or ψ is an axiom, we detach ψ from the axiom $\psi \to \varphi \to \psi$.

Deduction theorem $\Leftrightarrow$ combinatory abstraction

$$\Gamma, x : \varphi \vdash M : \psi \quad \text{iff} \quad \Gamma \vdash \lambda^* x.\, M : \varphi \to \psi.$$

Case 1: If $\psi \in \Gamma$, or ψ is an axiom, we detach ψ from the axiom $\psi \to \varphi \to \psi$.

If $M = y$ is a variable in Γ, then $\lambda^* x.\, y = \mathbf{K} y$.

Deduction theorem $\Leftrightarrow$ combinatory abstraction

$$\Gamma, x : \varphi \vdash M : \psi \quad \text{iff} \quad \Gamma \vdash \lambda^* x.\, M : \varphi \to \psi.$$

Case 1: If $\psi \in \Gamma$, or ψ is an axiom, we detach ψ from the axiom $\psi \to \varphi \to \psi$.

If $M = y$ is a variable in Γ, then $\lambda^* x.\, y = \mathbf{K} y$.

Case 1^+: One can do the same if $x : \varphi$ not used in proof.

Deduction theorem $\Leftrightarrow$ combinatory abstraction

$$\Gamma, x : \varphi \vdash M : \psi \quad \text{iff} \quad \Gamma \vdash \lambda^* x.\, M : \varphi \to \psi.$$

Case 1: If $\psi \in \Gamma$, or ψ is an axiom, we detach ψ from the axiom $\psi \to \varphi \to \psi$.

If $M = y$ is a variable in Γ, then $\lambda^* x.\, y = \mathbf{K} y$.

Case 1^+: One can do the same if $x : \varphi$ not used in proof.

Case 2: If $\psi = \varphi$ we use the example proof of $\varphi \to \varphi$.

Deduction theorem $\Leftrightarrow$ combinatory abstraction

$$\Gamma, x : \varphi \vdash M : \psi \quad \text{iff} \quad \Gamma \vdash \lambda^* x.\, M : \varphi \to \psi.$$

Case 1: If $\psi \in \Gamma$, or ψ is an axiom, we detach ψ from the axiom $\psi \to \varphi \to \psi$.

If $M = y$ is a variable in Γ, then $\lambda^* x.\, y = \mathbf{K} y$.

Case 1^+: One can do the same if $x : \varphi$ not used in proof.

Case 2: If $\psi = \varphi$ we use the example proof of $\varphi \to \varphi$.

If $M = x$, then $\lambda^* x., x = \mathbf{I} = \mathbf{SKK}$.

Deduction theorem $\Leftrightarrow$ combinatory abstraction

$$\Gamma, x : \varphi \vdash M : \psi \quad \text{iff} \quad \Gamma \vdash \lambda^* x.\, M : \varphi \to \psi.$$

Deduction theorem $\Leftrightarrow$ combinatory abstraction

$$\Gamma, x : \varphi \vdash M : \psi \quad \text{iff} \quad \Gamma \vdash \lambda^* x.\, M : \varphi \to \psi.$$

Case 3: If ψ obtained from α and $\alpha \to \psi$, apply induction.
There are proofs of $\varphi \to \alpha$ and $\varphi \to (\alpha \to \psi)$ from Γ.
Detach those from axiom (S).

Deduction theorem $\Leftrightarrow$ combinatory abstraction

$$\Gamma, x : \varphi \vdash M : \psi \quad \text{iff} \quad \Gamma \vdash \lambda^* x.\, M : \varphi \to \psi.$$

Case 3: If ψ obtained from α and $\alpha \to \psi$, apply induction.
There are proofs of $\varphi \to \alpha$ and $\varphi \to (\alpha \to \psi)$ from Γ.
Detach those from axiom (S).

If $M = P^{\alpha \to \psi} Q^{\alpha}$, then $\lambda^* x.\, M = \mathbf{S}(\lambda^* x.\, P)(\lambda^* x.\, Q)$.

∘

Jak trudny jest rachunek zdań (dygresja)

Problem wnioskowania w rachunku zdań:
Czy dana formuła (implikacyjnego) rachunku zdań jest konsekwencją danych schematów aksjomatów?

Twierdzenie (Linial, Post, 1949):
Problem wnioskowania w rachunku zdań jest nierozstrzygalny.

◦

Various implicational axioms...

$$\mathsf{B} \;: (\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma;$$

$$\mathsf{B}' : (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma;$$

$$\mathsf{C} \;: (\alpha \to \beta \to \gamma) \to \beta \to \alpha \to \gamma;$$

$$\mathsf{W} : (\alpha \to \alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta.$$

Various implicational axioms. . .

B : $(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$;

B′ : $(\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma$;

C : $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to \beta \to \alpha \to \gamma$;

W : $(\alpha \to \alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$.

. . . and logics:

SBCI – relevant logic (every assumption must be used, cf. λI).

BCK – affine logic (every assumption used at most once).

BCI – BCI-logic (every assumption used exactly once).

BB'IW – ticket entailment.

Semantyka algebraiczna

Algebra formuł

Relacja $\leq_\Gamma$ w zbiorze $\mathcal{F}$ wszystkich formuł:

$$\varphi \leq_\Gamma \psi \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

jest quasi-porządkiem (jest zwrotna i przechodnia).

Algebra formuł

Relacja $\leq_\Gamma$ w zbiorze $\mathcal{F}$ wszystkich formuł:

$$\varphi \leq_\Gamma \psi \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

jest quasi-porządkiem (jest zwrotna i przechodnia).

Równoważność indukowana przez $\leq$

$$\varphi \sim_\Gamma \psi \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Zbiór $\mathcal{L}_\Gamma = \mathcal{F}/_\sim$ jest częściowo uporządkowany przez

$$[\varphi] \leq [\psi] \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

∘

Własności porządku $\mathcal{L} = \langle \mathcal{F}/_{\sim}, \leq \rangle$

- Elementem najmniejszym („zerem”) jest
  $$0 = [\bot] = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \neg\varphi\}.$$

Własności porządku $\mathcal{L} = \langle \mathcal{F}/_{\sim}, \leq \rangle$

- Elementem najmniejszym („zerem”) jest
$$0 = [\bot] = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \neg\varphi\}.$$
- Elementem największym („jedynką”) jest
$$1 = [\top] = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\}.$$

Własności porządku $\mathcal{L} = \langle \mathcal{F}/_{\sim}, \leq \rangle$

- Elementem najmniejszym („zerem”) jest
$$0 = [\bot] = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \neg\varphi\}.$$
- Elementem największym („jedynką”) jest
$$1 = [\top] = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\}.$$
Uwaga: $[\alpha \to \beta] = 1 \Leftrightarrow [\alpha] \leq [\beta]$.

Własności porządku $\mathcal{L} = \langle \mathcal{F}/_\sim , \leq \rangle$

- Elementem najmniejszym („zerem”) jest
$$0 = [\bot] = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \neg\varphi\}.$$
- Elementem największym („jedynką”) jest
$$1 = [\top] = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\}.$$
Uwaga: $[\alpha \to \beta] = 1 \Leftrightarrow [\alpha] \leq [\beta]$.
- Kresem dolnym zbioru $\{[\varphi], [\psi]\}$ jest $[\varphi \wedge \psi]$, a kresem górnym jest $[\varphi \vee \psi]$.

Własności porządku $\mathcal{L} = \langle \mathcal{F}/_{\sim}, \leq \rangle$

- Elementem najmniejszym („zerem”) jest
  $$0 = [\bot] = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \neg\varphi\}.$$
- Elementem największym („jedynką”) jest
  $$1 = [\top] = \{\varphi \mid \Gamma \vdash \varphi\}.$$
  Uwaga: $[\alpha \to \beta] = 1 \Leftrightarrow [\alpha] \leq [\beta]$.
- Kresem dolnym zbioru $\{[\varphi], [\psi]\}$ jest $[\varphi \wedge \psi]$, a kresem górnym jest $[\varphi \vee \psi]$.

Krata (lattice): zbiór częściowo uporządkowany (poset), w którym każdy podzbiór dwuelementowy ma kres górny (l.u.b.) i kres dolny (g.l.b.).

Kraty

Krata: zbiór częściowo uporządkowany, w którym każdy podzbiór dwuelementowy ma kres górny i dolny.

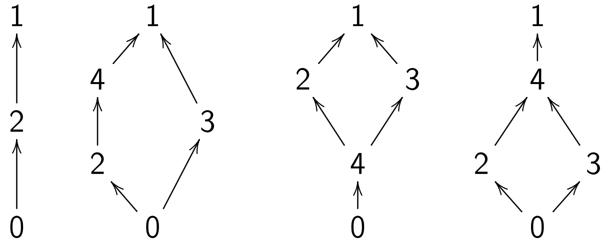
Oznaczenia: $a \sqcup b = \sup\{a, b\}$, $a \sqcap b = \inf\{a, b\}$.

Element najmniejszy kraty (jeśli istnieje) nazywamy *zerem*, a największy *jedynką*

Fakt: *Następujące warunki są równoważne w kracie:*

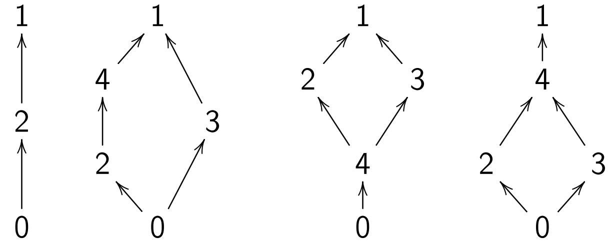
- $a \leq b$;
- $a \sqcap b = a$;
- $a \sqcup b = b$.

Przykłady krat



(a) (b) (c) (d)

Przykłady krat



(a) (b) (c) (d)

W kracie (b) zachodzi:

$(2 \sqcup 3) \sqcap 4 = 1 \sqcap 4 = 4$ oraz $(2 \sqcap 4) \sqcup (3 \sqcap 4) = 2 \sqcup 0 = 2$

$\circ$

Krata dystrybutywna

Krata jest *dystrybutywna*, gdy dla dowolnych a, b, c:

$$(a \sqcup b) \sqcap c = (a \sqcap c) \sqcup (b \sqcap c)$$

$$(a \sqcap b) \sqcup c = (a \sqcup c) \sqcap (b \sqcup c)$$

Krata dystrybutywna

Krata jest *dystrybutywna*, gdy dla dowolnych a, b, c:

$$(a \sqcup b) \sqcap c = (a \sqcap c) \sqcup (b \sqcap c)$$

$$(a \sqcap b) \sqcup c = (a \sqcup c) \sqcap (b \sqcup c)$$

Fakt: *Krata $\mathcal{L}$ jest dystrybutywna, bo*

$$\vdash (\varphi \vee \psi) \wedge \vartheta \leftrightarrow (\varphi \wedge \vartheta) \vee (\psi \wedge \vartheta)$$

$$\vdash (\varphi \wedge \psi) \vee \vartheta \leftrightarrow (\varphi \vee \vartheta) \wedge (\psi \vee \vartheta)$$

∘

Algebra Boole'a

Krata dystrybutywna z zerem i jedynką jest *algebrą Boole'a*, gdy dla dowolnego a istnieje *dopełnienie* (complement), tj. takie b, że

$$a \sqcup b = 1 \qquad \text{oraz} \qquad a \sqcap b = 0.$$

Algebra Boole'a

Krata dystrybutywna z zerem i jedynką jest *algebrą Boole'a*, gdy dla dowolnego a istnieje *dopełnienie* (complement), tj. takie b, że

$$a \sqcup b = 1 \qquad \text{oraz} \qquad a \sqcap b = 0.$$

W kracie $\mathcal{L}$ mamy problem: wprawdzie $[\varphi \wedge \neg\varphi] = 0$, ale niekoniecznie $[\varphi \vee \neg\varphi] = 1$. To nie będzie dopełnienie, więc $\mathcal{L}$ nie będzie algebrą Boole'a.

Pseudodopełnienie (pseudocomplement)

Fakt:
Klasa $[\neg\varphi]$ *jest największym elementem* $\mathcal{L}$*, który daje zero w przecięciu z* $[\varphi]$ *— czyli pseudodopełnieniem klasy* $[\varphi]$*.*

Pseudodopełnienie (pseudocomplement)

Fakt:
Klasa $[\neg\varphi]$ *jest największym elementem* $\mathcal{L}$*, który daje zero w przecięciu z* $[\varphi]$ *— czyli* *pseudodopełnieniem* *klasy* $[\varphi]$*.*

Dowód: Bo jeśli $[\alpha] \sqcap [\varphi] = 0$, to $\Gamma \vdash \alpha \wedge \varphi \to \bot$, skąd $[\alpha] \leq [\varphi \to \bot]$. A to dlatego, że formuły

$$\alpha \wedge \beta \to \gamma \quad \text{i} \quad \alpha \to \beta \to \gamma$$

są równoważne. To się nazywa „currying".

∘

Co to jest implikacja?

Currying: $\vdash (\alpha \wedge \beta \to \gamma) \quad \leftrightarrow \quad (\alpha \to \beta \to \gamma)$.

Co to jest implikacja?

Currying: $\vdash (\alpha \wedge \beta \to \gamma) \quad \leftrightarrow \quad (\alpha \to \beta \to \gamma)$.

W algebrze $\mathcal{L}$ mamy więc:

$$[\alpha] \sqcap [\beta] \leq [\gamma] \quad \Leftrightarrow \quad [\alpha] \leq [\beta \to \gamma]$$

Co to jest implikacja?

Currying: $\vdash (\alpha \wedge \beta \to \gamma) \quad \leftrightarrow \quad (\alpha \to \beta \to \gamma)$.

W algebrze $\mathcal{L}$ mamy więc:

$$[\alpha] \sqcap [\beta] \leq [\gamma] \quad \Leftrightarrow \quad [\alpha] \leq [\beta \to \gamma]$$

Morał:
Klasa $[\beta \to \gamma]$ *to największy element* $c \in \mathcal{L}$
o własności $c \sqcap [\beta] \leq [\gamma]$.

∘

Pseudodopełnienie względne (relative p.)

Pseudodopełnienie elementu *a względem b*,
to największy element c o własności $c \sqcap a \leq b$.

Jeśli taki element istnieje, to jest tylko jeden.
Oznaczamy go przez $a \Rightarrow b$. Dla każdego x zachodzi wtedy

$$x \sqcap a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad x \leq a \Rightarrow b.$$

Pseudodopełnienie (względem zera) oznaczamy przez $\sim a$

$\circ$

Algebra Heytinga

Krata dystrybutywna z zerem i jedynką jest *algebrą Heytinga*, (albo *algebrą pseudoboole'owską*) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych a i b istnieje pseudodopełnienie względne $a \Rightarrow b$.

Algebra Heytinga

Krata dystrybutywna z zerem i jedynką jest *algebrą Heytinga*, (albo *algebrą pseudoboole'owską*) wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych a i b istnieje pseudodopełnienie względne $a \Rightarrow b$.

Morał: *Krata $\mathcal{L}$ jest algebrą Heytinga.*

Nazywamy ją też *algebrą formuł* albo *algebrą Lindenbauma* dla intuicjonistycznego rachunku zdań.

(Algebra Lindenbauma dla klasycznego rachunku zdań jest algebrą Boole'a.)

∘

Dwie pożyteczne wiadomości

1. *Jeśli* $a \Rightarrow b$ *istnieje dla dowolnych* a *i* b*, to krata jest dystrybutywna.*

2. *Każda skończona krata dystrybutywna jest algebrą Heytinga.*

∘

Jeszcze lepsza wiadomość

Rodzina podzbiorów otwartych przestrzeni topologicznej tworzy algebrę Heytinga (ze względu na inkluzję i zwykłe działania).

Pseudodopełnienie względne: $A \Rightarrow B = \mathrm{Int}(-A \cup B)$;

Pseudodopełnienie: $\sim A = \mathrm{Int}(-A)$

Def: *Przestrzeń topologiczna* to zbiór z wyróżnioną rodziną zbiorów *otwartych*. Zbiory otwarte są zamknięte ze względu na dowolne sumy i skończone iloczyny. Zbiór pusty i cała przestrzeń są otwarte.

Wnętrze $\mathrm{Int}(A)$ zbioru A to największy zbiór otwarty zawarty w A.

Poprawność definicji

Fakt: Jeśli zbiory X, A i B są otwarte, to

$$X \cap A \subseteq B \qquad \Leftrightarrow \qquad X \subseteq \mathrm{Int}(-A \cup B).$$

Dowód: Zadanie dla pierwszego roku: dla *dowolnych* X, A, B:

$$X \cap A \subseteq B \qquad \Leftrightarrow \qquad X \subseteq -A \cup B$$

Ponadto, jeśli X otwarty i $X \subseteq Y$, to $X \subseteq \mathrm{Int}(Y)$.

$\circ$

Semantyka algebraiczna

$\mathcal{H} = \langle H, \sqcup, \sqcap, \Rightarrow, 0, 1\rangle$ – algebra Heytinga;

$v : Z \to H$ – wartościowanie zmiennych ze zbioru Z;

$[\![\varphi]\!]_v^{\mathcal{H}}$ (lub $[\![\varphi]\!]_v$) – znaczenie formuły φ przy wartościowaniu v.

$$
\begin{array}{lcl}
[\![p]\!]_v & = & v(p), \quad \text{dla } p \in Z; \\
[\![\bot]\!]_v & = & 0; \\
[\![\varphi \vee \psi]\!]_v & = & [\![\varphi]\!]_v \sqcup [\![\psi]\!]_v\,; \\
[\![\varphi \wedge \psi]\!]_v & = & [\![\varphi]\!]_v \sqcap [\![\psi]\!]_v\,; \\
[\![\varphi \to \psi]\!]_v & = & [\![\varphi]\!]_v \Rightarrow [\![\psi]\!]_v\,.
\end{array}
$$

Piszemy:

- $\mathcal{H}, v \models \varphi$, gdy $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_{v} = 1$;

Piszemy:

- $\mathcal{H}, v \models \varphi$, gdy $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_{v} = 1$;
- $\mathcal{H} \models \varphi$, gdy $\mathcal{H}, v \models \varphi$, dla wszystkich v;

Piszemy:

- $\mathcal{H}, v \models \varphi$, gdy $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_{v} = 1$;
- $\mathcal{H} \models \varphi$, gdy $\mathcal{H}, v \models \varphi$, dla wszystkich v;
- $\mathcal{H}, v \models \Gamma$, gdy $\mathcal{H}, v \models \varphi$, dla wszystkich $\varphi \in \Gamma$;

Piszemy:

- $\mathcal{H}, v \models \varphi$, gdy $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_v = 1$;
- $\mathcal{H} \models \varphi$, gdy $\mathcal{H}, v \models \varphi$, dla wszystkich v;
- $\mathcal{H}, v \models \Gamma$, gdy $\mathcal{H}, v \models \varphi$, dla wszystkich $\varphi \in \Gamma$;
- $\mathcal{H} \models \Gamma$, gdy $\mathcal{H}, v \models \Gamma$, dla wszystkich v;

Piszemy:

- $\mathcal{H}, v \models \varphi$, gdy $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_{v} = 1$;
- $\mathcal{H} \models \varphi$, gdy $\mathcal{H}, v \models \varphi$, dla wszystkich v;
- $\mathcal{H}, v \models \Gamma$, gdy $\mathcal{H}, v \models \varphi$, dla wszystkich $\varphi \in \Gamma$;
- $\mathcal{H} \models \Gamma$, gdy $\mathcal{H}, v \models \Gamma$, dla wszystkich v;
- $\Gamma \models \varphi$, gdy $\mathcal{H}, v \models \Gamma$ zawsze pociąga $\mathcal{H}, v \models \varphi$;

Piszemy:

- $\mathcal{H}, v \models \varphi$, gdy $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_{v} = 1$;
- $\mathcal{H} \models \varphi$, gdy $\mathcal{H}, v \models \varphi$, dla wszystkich v;
- $\mathcal{H}, v \models \Gamma$, gdy $\mathcal{H}, v \models \varphi$, dla wszystkich $\varphi \in \Gamma$;
- $\mathcal{H} \models \Gamma$, gdy $\mathcal{H}, v \models \Gamma$, dla wszystkich v;
- $\Gamma \models \varphi$, gdy $\mathcal{H}, v \models \Gamma$ zawsze pociąga $\mathcal{H}, v \models \varphi$;
- $\models \varphi$, gdy $\mathcal{H}, v \models \varphi$, dla wszystkich $\mathcal{H}, v$.

Piszemy:

- $\mathcal{H}, v \models \varphi$, gdy $[\![\varphi]\!]^{\mathcal{H}}_{v} = 1$;
- $\mathcal{H} \models \varphi$, gdy $\mathcal{H}, v \models \varphi$, dla wszystkich v;
- $\mathcal{H}, v \models \Gamma$, gdy $\mathcal{H}, v \models \varphi$, dla wszystkich $\varphi \in \Gamma$;
- $\mathcal{H} \models \Gamma$, gdy $\mathcal{H}, v \models \Gamma$, dla wszystkich v;
- $\Gamma \models \varphi$, gdy $\mathcal{H}, v \models \Gamma$ zawsze pociąga $\mathcal{H}, v \models \varphi$;
- $\models \varphi$, gdy $\mathcal{H}, v \models \varphi$, dla wszystkich $\mathcal{H}, v$.
  I to się wtedy nazywa *tautologia*.

Twierdzenie o pełności

1. Poprawność: *Jeśli* $\Gamma \vdash \varphi$*, to* $\Gamma \models \varphi$*.*
2. Pełność: *I na odwrót.*

Twierdzenie o pełności

1. Poprawność: *Jeśli* $\Gamma \vdash \varphi$*, to* $\Gamma \models \varphi$*.*
2. Pełność: *I na odwrót.*

Dowód (1): Jeśli $\Gamma = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$ to przez $[\![\Gamma]\!]_v$ oznaczamy element $[\![\vartheta_1]\!]_v \sqcap \cdots \sqcap [\![\vartheta_n]\!]_v$. (Uwaga: $[\![\varnothing]\!]_v = 1$.)

Twierdzenie o pełności

1. Poprawność: *Jeśli* $\Gamma \vdash \varphi$*, to* $\Gamma \models \varphi$*.*
2. Pełność: *I na odwrót.*

Dowód (1): Jeśli $\Gamma = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$ to przez $[\![\Gamma]\!]_v$ oznaczamy element $[\![\vartheta_1]\!]_v \sqcap \cdots \sqcap [\![\vartheta_n]\!]_v$. (Uwaga: $[\![\varnothing]\!]_v = 1$.)

Przez indukcję ze względu na rozmiary dowodu, pokazujemy, że jeśli $\Gamma \vdash \varphi$, to $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi]\!]_v$, dla dowolnych $\mathcal{H}, v$. W kroku indukcyjnym mamy różne przypadki, wg ostatniej użytej reguły.

Twierdzenie o pełności

1. Poprawność: *Jeśli* $\Gamma \vdash \varphi$*, to* $\Gamma \models \varphi$*.*
2. Pełność: *I na odwrót.*

Dowód (1): Jeśli $\Gamma = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$ to przez $[\![\Gamma]\!]_v$ oznaczamy element $[\![\vartheta_1]\!]_v \sqcap \cdots \sqcap [\![\vartheta_n]\!]_v$. (Uwaga: $[\![\varnothing]\!]_v = 1$.)

Przez indukcję ze względu na rozmiary dowodu, pokazujemy, że jeśli $\Gamma \vdash \varphi$, to $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi]\!]_v$, dla dowolnych $\mathcal{H}, v$. W kroku indukcyjnym mamy różne przypadki, wg ostatniej użytej reguły.

Przyp. 1: Aksjomat $\Gamma \vdash \varphi$, gdzie $\varphi \in \Gamma$ – oczywiste.

Twierdzenie o pełności

1. Poprawność: *Jeśli* $\Gamma \vdash \varphi$*, to* $\Gamma \models \varphi$*.*
2. Pełność: *I na odwrót.*

Dowód (1): Jeśli $\Gamma = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$ to przez $[\![\Gamma]\!]_v$ oznaczamy element $[\![\vartheta_1]\!]_v \sqcap \cdots \sqcap [\![\vartheta_n]\!]_v$. (Uwaga: $[\![\varnothing]\!]_v = 1$.)

Przez indukcję ze względu na rozmiary dowodu, pokazujemy, że jeśli $\Gamma \vdash \varphi$, to $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi]\!]_v$, dla dowolnych $\mathcal{H}, v$. W kroku indukcyjnym mamy różne przypadki, wg ostatniej użytej reguły.

Przyp. 1: Aksjomat $\Gamma \vdash \varphi$, gdzie $\varphi \in \Gamma$ – oczywiste.

Przyp. 2: Dowód $\Gamma \vdash \varphi$ otrzymano przez (E$\rightarrow$) z dowodów $\Gamma \vdash \psi$ i $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$.

Twierdzenie o pełności

1. Poprawność: *Jeśli* $\Gamma \vdash \varphi$*, to* $\Gamma \models \varphi$*.*
2. Pełność: *I na odwrót.*

Dowód (1): Jeśli $\Gamma = \{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n\}$ to przez $[\![\Gamma]\!]_v$ oznaczamy element $[\![\vartheta_1]\!]_v \sqcap \cdots \sqcap [\![\vartheta_n]\!]_v$. (Uwaga: $[\![\varnothing]\!]_v = 1$.)

Przez indukcję ze względu na rozmiary dowodu, pokazujemy, że jeśli $\Gamma \vdash \varphi$, to $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\varphi]\!]_v$, dla dowolnych $\mathcal{H}, v$. W kroku indukcyjnym mamy różne przypadki, wg ostatniej użytej reguły.

Przyp. 1: Aksjomat $\Gamma \vdash \varphi$, gdzie $\varphi \in \Gamma$ – oczywiste.

Przyp. 2: Dowód $\Gamma \vdash \varphi$ otrzymano przez (E$\rightarrow$) z dowodów $\Gamma \vdash \psi$ i $\Gamma \vdash \psi \rightarrow \varphi$. Wtedy $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\psi]\!]_v$ i $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\psi \rightarrow \varphi]\!]_v$, zatem $[\![\Gamma]\!]_v \leq [\![\psi]\!]_v \sqcap [\![\psi \rightarrow \varphi]\!]_v \leq [\![\varphi]\!]_v$.

Twierdzenie o pełności

1. Poprawność: *Jeśli* $\Gamma \vdash \varphi$, *to* $\Gamma \models \varphi$.
2. Pełność: *I na odwrót.*

Twierdzenie o pełności

1. Poprawność: *Jeśli* $\Gamma \vdash \varphi$*, to* $\Gamma \models \varphi$*.*
2. Pełność: *I na odwrót.*

Dowód (1): Pozostałe przypadki też łatwe (ćwiczenia?)

Twierdzenie o pełności

1. Poprawność: *Jeśli* $\Gamma \vdash \varphi$*, to* $\Gamma \models \varphi$*.*
2. Pełność: *I na odwrót.*

Dowód (1): Pozostałe przypadki też łatwe (ćwiczenia?)

Dowód (2): W algebrze $\mathcal{L}_\Gamma$ weźmy takie wartościowanie v, że $v(p) = [p]_\sim$ dla $p \in Z$.

Twierdzenie o pełności

1. Poprawność: *Jeśli* $\Gamma \vdash \varphi$, *to* $\Gamma \models \varphi$.
2. Pełność: *I na odwrót.*

Dowód (1): Pozostałe przypadki też łatwe (ćwiczenia?)

Dowód (2): W algebrze $\mathcal{L}_\Gamma$ weźmy takie wartościowanie v, że $v(p) = [p]_\sim$ dla $p \in Z$.

Wtedy zawsze $[\![\varphi]\!]_v = [\varphi]_\sim$ (trywialna indukcja).

Twierdzenie o pełności

1. Poprawność: *Jeśli* $\Gamma \vdash \varphi$*, to* $\Gamma \models \varphi$*.*
2. Pełność: *I na odwrót.*

Dowód (1): Pozostałe przypadki też łatwe (ćwiczenia?)

Dowód (2): W algebrze $\mathcal{L}_\Gamma$ weźmy takie wartościowanie v, że $v(p) = [p]_\sim$ dla $p \in Z$.

Wtedy zawsze $[\![\varphi]\!]_v = [\varphi]_\sim$ (trywialna indukcja).

Jeśli $\gamma \in \Gamma$, to $[\![\gamma]\!]_v = [\gamma]_\sim = 1$. A więc $\mathcal{L}_\Gamma, v \models \Gamma$.

Twierdzenie o pełności

1. Poprawność: *Jeśli* $\Gamma \vdash \varphi$, *to* $\Gamma \models \varphi$.
2. Pełność: *I na odwrót.*

Dowód (1): Pozostałe przypadki też łatwe (ćwiczenia?)

Dowód (2): W algebrze $\mathcal{L}_\Gamma$ weźmy takie wartościowanie v, że $v(p) = [p]_\sim$ dla $p \in Z$.

Wtedy zawsze $[\![\varphi]\!]_v = [\varphi]_\sim$ (trywialna indukcja).

Jeśli $\gamma \in \Gamma$, to $[\![\gamma]\!]_v = [\gamma]_\sim = 1$. A więc $\mathcal{L}_\Gamma, v \models \Gamma$.

Skoro $\Gamma \models \varphi$, to $\mathcal{L}_\Gamma, v \models \varphi$, czyli $[\varphi]_\sim = [\![\varphi]\!]_v = 1 = \{\alpha \mid \Gamma \vdash \alpha\}$.

A zatem $\Gamma \vdash \varphi$.

Wniosek *Następujące formuły nie są intuicjonistycznie prawdziwe:*

1. $\neg p \vee p$;
2. $\neg\neg p \to p$.

Wniosek *Następujące formuły nie są intuicjonistycznie prawdziwe:*

1. $\neg p \vee p$;
2. $\neg\neg p \to p$.

Dowód: Zbiory otwarte na prostej rzeczywistej tworzą algebrę Heytinga $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ z działaniami $\cup$, $\cap$, $0 = \varnothing$, $1 = \mathbb{R}$, oraz:

$$\sim A = \mathrm{Int}(-A), \qquad A \Rightarrow B = \mathrm{Int}(-A \cup B).$$

Wniosek *Następujące formuły nie są intuicjonistycznie prawdziwe:*

1. $\neg p \vee p$;
2. $\neg\neg p \to p$.

Dowód: Zbiory otwarte na prostej rzeczywistej tworzą algebrę Heytinga $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ z działaniami $\cup$, $\cap$, $0 = \varnothing$, $1 = \mathbb{R}$, oraz:

$$\sim A = \mathrm{Int}(-A), \qquad A \Rightarrow B = \mathrm{Int}(-A \cup B).$$

W tej algebrze, przy wartościowaniu $v(p) = \mathbb{R} - \{0\}$ mamy:

- $[\![\neg p]\!]_v = \sim(\mathbb{R} - \{0\}) = \mathrm{Int}(\{0\}) = \varnothing$;

Wniosek *Następujące formuły nie są intuicjonistycznie prawdziwe:*

1. $\neg p \vee p$;
2. $\neg\neg p \to p$.

Dowód: Zbiory otwarte na prostej rzeczywistej tworzą algebrę Heytinga $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ z działaniami $\cup$, $\cap$, $0 = \varnothing$, $1 = \mathbb{R}$, oraz:

$$\sim A = \mathrm{Int}(-A), \qquad A \Rightarrow B = \mathrm{Int}(-A \cup B).$$

W tej algebrze, przy wartościowaniu $v(p) = \mathbb{R} - \{0\}$ mamy:

- $[\![\neg p]\!]_v = \sim(\mathbb{R} - \{0\}) = \mathrm{Int}(\{0\}) = \varnothing$;
- $[\![\neg p \vee p]\!]_v = \varnothing \cup (\mathbb{R} - \{0\}) = \mathbb{R} - \{0\} \neq 1$;

Wniosek *Następujące formuły nie są intuicjonistycznie prawdziwe:*

1. $\neg p \vee p$;
2. $\neg\neg p \to p$.

Dowód: Zbiory otwarte na prostej rzeczywistej tworzą algebrę Heytinga $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ z działaniami $\cup$, $\cap$, $0 = \varnothing$, $1 = \mathbb{R}$, oraz:

$$\sim A = \mathrm{Int}(-A), \qquad A \Rightarrow B = \mathrm{Int}(-A \cup B).$$

W tej algebrze, przy wartościowaniu $v(p) = \mathbb{R} - \{0\}$ mamy:

- $[\![\neg p]\!]_v = \sim(\mathbb{R} - \{0\}) = \mathrm{Int}(\{0\}) = \varnothing$;
- $[\![\neg p \vee p]\!]_v = \varnothing \cup (\mathbb{R} - \{0\}) = \mathbb{R} - \{0\} \neq 1$;
- $[\![\neg\neg p]\!]_v = \sim\varnothing = \mathrm{Int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;

Wniosek *Następujące formuły nie są intuicjonistycznie prawdziwe:*

1. $\neg p \vee p$;
2. $\neg\neg p \to p$.

Dowód: Zbiory otwarte na prostej rzeczywistej tworzą algebrę Heytinga $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ z działaniami $\cup$, $\cap$, $0 = \varnothing$, $1 = \mathbb{R}$, oraz:

$$\sim A = \mathrm{Int}(-A), \qquad A \Rightarrow B = \mathrm{Int}(-A \cup B).$$

W tej algebrze, przy wartościowaniu $v(p) = \mathbb{R} - \{0\}$ mamy:

- $[\![\neg p]\!]_v = \sim(\mathbb{R} - \{0\}) = \mathrm{Int}(\{0\}) = \varnothing$;
- $[\![\neg p \vee p]\!]_v = \varnothing \cup (\mathbb{R} - \{0\}) = \mathbb{R} - \{0\} \neq 1$;
- $[\![\neg\neg p]\!]_v = \sim\varnothing = \mathrm{Int}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
- $[\![\neg\neg p \to p]\!] = \mathrm{Int}(-\mathbb{R} \cup (\mathbb{R} - \{0\})) =$
  $\mathrm{Int}(\varnothing \cup (\mathbb{R} - \{0\})) = \mathrm{Int}(\mathbb{R} - \{0\}) = \mathbb{R} - \{0\} \neq 1$.

◦

Czytanie z listu Charlesa Sandersa Peirce'a do Williama Jamesa

I have long felt that it is a serious defect in existing logic that it takes no heed of the limit between two realms. I do not say that the Principle of Excluded Middle is downright false; but I do say that in every field of thought whatsoever there is an intermediate ground between positive assertion and positive negation which is just as Real as they.
(NEM 3:851, Feb. 26, 1909)

Dalsze wnioski

Następujące formuły nie są intuicjonistycznie prawdziwe:

1. $(\neg\neg p \to p) \to \neg p \vee p$;
2. $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$;
3. $(p \to q) \to (\neg p \to q) \to q$;
4. $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$;
5. $((p \to q) \to p) \to p$ (prawo Peirce'a).

Dowód: Ćwiczenia.

∘

Własność skończonego modelu

Twierdzenie:

Jeśli $\mathcal{H} \models \varphi$ *dla wszystkich skończonych algebr* $\mathcal{H}$, *to* $\models \varphi$.

(Inaczej: *Jeśli* $\not\models \varphi$, *to istnieje skończony kontrprzykład.*)

Własność skończonego modelu

Twierdzenie:

Jeśli $\mathcal{H} \models \varphi$ *dla wszystkich skończonych algebr* $\mathcal{H}$*, to* $\models \varphi$*.*

(Inaczej: *Jeśli* $\not\models \varphi$*, to istnieje skończony kontrprzykład.*)

Dowód: Ćwiczenia?

∘

Rozstrzygalność

Wniosek: Intuicjonistyczny rachunek zdań jest rozstrzygalny.

Rozstrzygalność

Wniosek: Intuicjonistyczny rachunek zdań jest rozstrzygalny.

Dowód: Dla danej formuły φ albo istnieje dowód albo istnieje skończony kontrprzykład. Szukamy obu na raz.

Rozstrzygalność

Wniosek: Intuicjonistyczny rachunek zdań jest rozstrzygalny.

Dowód: Dla danej formuły φ albo istnieje dowód albo istnieje skończony kontrprzykład. Szukamy obu na raz.

Złożoność (tego algorytmu): zniechęcająca.

○

Nie wystarczy jeden skończony model

Fakt: *Formuła* $\bigvee\{p_i \to p_j \mid i,j \in \{1,\ldots,n\} \wedge i \neq j\}$

- *nie jest tautologią;*
- *jest prawdziwa w każdej algebrze Heytinga, która ma mniej niż n elementów.*

Nie wystarczy jeden skończony model

Fakt: *Formuła* $\bigvee\{p_i \to p_j \mid i,j \in \{1,\ldots,n\} \wedge i \neq j\}$

- *nie jest tautologią;*
- *jest prawdziwa w każdej algebrze Heytinga, która ma mniej niż n elementów.*

Morał:

Logika intuicjonistyczna nie jest logiką „wielowartościową”: nie wystarczy ustalony skończony zbiór wartości.