

## Równość w teorii typów

- ▶ Konwersja  $x =_{\beta\delta} y$  (judgmental/definitional equality);
- ▶ Definiowalna formułą, np. równość Leibniza, ekstensjonalna równość strumieni, itp.
- ▶ Propositional equality: predykat indukcyjny  $x =_A y$  z jednym konstruktorem  $refl_A(x) : x =_A x$ .

**Ściślej:** to jest rodzina predykatów indukcyjnych

$$eq(A)(x) : A \rightarrow *, \text{ dla dowolnego } x : A$$

## Propositional equality in Coq

parametry      typ indeksu  
 $\downarrow$                      $\downarrow$                      $\downarrow$

```
Inductive eq (A : Type) (x : A) : A -> Prop :=
  eq_refl : x = x
```

```
eq_ind
: forall (A : Type) (x : A) (P : A -> Prop),
  P x -> forall y : A, x = y -> P y
```

```
eq_rec
: forall (A : Type) (x : A) (P : A -> Set),
  P x -> forall y : A, x = y -> P y
```

## Indukcja dla równości (path induction)

**Fakt:** Jeśli  $F : A \rightarrow B$ , oraz  $x =_A y$ , to  $Fx =_B Fy$ .

**Dowód:** Bierzemy  $C(x) : (y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow \mathbf{Prop}$  określone tak:  $C(x, y, p) = (Fx =_B Fy)$ , oraz

$$c(x) = refl_B(Fx) : C(x, x, refl_A(x)).$$

To wyznacza  $f(x) : (y : A) \rightarrow (p : x =_A y) \rightarrow C(x, y, p)$ , i wtedy  $f(x, y, p) : Fx =_B Fy$ .

Przy tym  $f(x, x, refl_A(x)) = c(x) = refl_B(Fx)$ .

## Indukcja

**Dla liczb naturalnych:**

Niech  $C : \mathbf{int} \rightarrow \mathcal{U}$  oraz  $c_0 : C(0)$ ,  $c_1 : (x : \mathbf{int}) \rightarrow C(x) \rightarrow C(sx)$ .

To wyznacza taką funkcję  $f : (y : \mathbf{int}) \rightarrow C(y)$ , że  $f(0) = c_0$ , oraz  $f(sx) = c_1 x (f x)$ , dla  $x : \mathbf{int}$ .

**Dla równości:**

Niech  $C(x) : (y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow \mathcal{U}$ , oraz  $c(x) : C(x, x, refl_A(x))$ .

To wyznacza taką funkcję  $f(x) : (y : A) \rightarrow (p : x =_A y) \rightarrow C(x, y, p)$ , że  $f(x, x, refl_A(x)) = c(x)$ , dla  $x : A$ .

## Indukcja dla równości (path induction)

Niech  $C(x) : (y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow \mathcal{U}$ , oraz  $c(x) : C(x, x, refl_A(x))$ .

To wyznacza taką funkcję  $f(x) : (y : A) \rightarrow (p : x =_A y) \rightarrow C(x, y, p)$ , że  $f(x, x, refl_A(x)) = c(x)$ , dla  $x : A$ .

**Sens moralny:** Każdy element typu  $x =_A y$  ma te same własności, co  $refl_A(x) : x =_A x$ .

**Uwaga:**

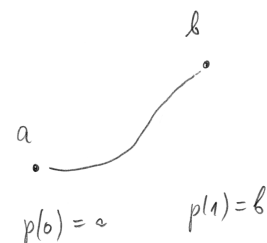
This does not prove that any  $p : x =_A y$  equals  $refl_A(x)$ . (Nawet typy  $x =_A y$  i  $x =_A x$  są różne, gdy  $x \neq_{\beta\delta} y$ .)

## Interpretacja topologiczna

Typy to przestrzenie topologiczne.

(Ozn.  $\mathbb{I} = [0, 1]$ .)

Obiekt  $p : a =_A b$  to *droga* od  $a$  do  $b$  w przestrzeni  $A$ , czyli taka funkcja ciągła  $p : \mathbb{I} \rightarrow A$ , że  $p(0) = a$ ,  $p(1) = b$ .



# Równość jest kongruencją

**Fakt 1:** Jeśli  $F : A \rightarrow B$ , oraz  $x =_A y$ , to  $Fx =_B Fy$ .

Dowód kolokwialny:

Skoro teza zachodzi dla  $(x, x, refl_A(x))$ ,  
to zachodzi dla dowolnej trójki  $(x, y, p)$ .

Interpretacja topologiczna:

Funkcja ciągła przeprowadza drogę w drogę.

# Droga powrotna

**Fakt 1:** Jeśli  $x =_A y$ , to  $y =_A x$ . Ścisłej: istnieje funkcja  $\lambda p. p^{-1} : (x =_A y) \rightarrow (y =_A x)$ .

**Dowód:** Niech  $C(x, y, p) = (y =_A x)$  i niech  $c(x) = refl_A(x) : C(x, x, refl_A(x))$ .

To określa taką funkcję  $f(x) : (y : A) \rightarrow (p : x =_A y) \rightarrow (y =_A x)$ ,

że  $f(x, x, refl_A(x)) = c(x) = refl_A(x)$ .

Czyli jeśli  $p : x =_A y$ , to  $p^{-1} = f(x, y, p)$ .

Uwaga: z tego wynika, że  $(refl_A(x))^{-1} = refl_A(x)$ .

# Składanie dróg

**Fakt 2:** Jeśli  $p : x =_A y$  oraz  $q : y =_A z$ , to  $p \cdot q : x =_A z$ .  
Na dodatek,  $p \cdot p^{-1} = refl_A(x)$ .

**Dowód:** Niech  $C(x, y, p) = \prod_{z:A} \prod_{q:y=Az} (x =_A z)$ , czyli  $C(x, y, p) = (z : A) \rightarrow (q : y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$ .

Potrzebujemy  $c(x) : \prod_{z:A} \prod_{q:x=Az} (x =_A z)$ , czyli  $c(x) : (z : A) \rightarrow (q : x =_A z) \rightarrow (x =_A z)$ .

Najprościej  $c(x, z, q) = q$ . Wtedy  $c(x, x, refl_A(x)) = refl_A(x)$ .

Indukcyjnie definiujemy taką funkcję  $f(x)$  typu

$(y : A) \rightarrow (p : x =_A y) \rightarrow (z : A) \rightarrow (q : y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$ ,

że  $f(x, x, refl_A(x)) = c(x) : (z : A) \rightarrow (q : y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$

Wtedy  $p \cdot q := f(x, y, p, z, q)$ .

# Składanie dróg

**Fakt 2:** Jeśli  $p : x =_A y$  oraz  $q : y =_A z$ , to  $p \cdot q : x =_A z$ .  
Na dodatek,  $p \cdot p^{-1} = refl_A(x)$ .

**Dowód:** Już mamy operację  $p \cdot q = f(x, y, p, z, q)$ , gdzie  $f(x, x, refl_A(x)) = c(x) : (z : A) \rightarrow (q : y =_A z) \rightarrow (x =_A z)$ , czyli

$f(x, x, refl_A(x), x, refl_A(x)) = c(x, x, refl_A(x)) = refl_A(x)$ .

A zatem:

$refl_A(x) \cdot refl_A(x)^{-1} = f(x, x, refl_A(x), x, refl_A(x)^{-1}) = f(x, x, refl_A(x), x, refl_A(x)) = c(x, x, refl_A(x)) = refl_A(x)$ .

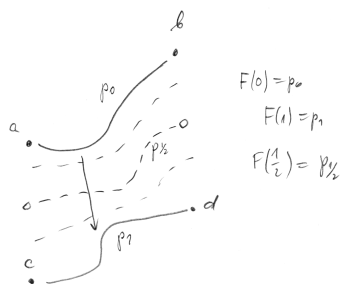
Równość  $p \cdot p^{-1} = refl_A(x)$  udowodnimy... przez indukcję, biorąc  $C(x, y, p) = (p \cdot p^{-1} = refl_A(x))$ .

Uwaga: tutaj  $C$  zależy od  $p$ .

# Interpretacja topologiczna

Równość między drogami  $p : a =_A b$ ,  $p' : c =_A d$ , to droga w przestrzeni  $x =_A y$ , czyli taka funkcja ciągła  $\phi : \mathbb{I} \rightarrow x =_A y$ , że  $\phi(0) = p$ ,  $\phi(1) = p'$ .

To pojęcie można uogólnić na dowolne funkcje.



# Równość jako homotopia

- ▶ Każdy element typu  $a =_A b$  ma te same własności, co  $refl_A(x) : a =_A a$ .
- ▶ Bo każda droga od  $a$  do  $b$  jest homotopijna (w przestrzeni  $A$ ) z trywialną pętlą od  $a$  do  $a$ .
- ▶ Ale nie każde dwa elementy typu  $a =_A b$  są równe.
- ▶ Bo w przestrzeni dróg od  $a$  do  $b$  może nie być takiej homotopii.

# Homotopia

Niech  $f, g : A \rightarrow B$  to funkcje ciągłe.

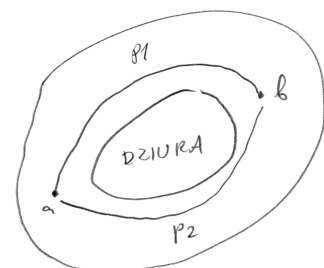
Homotopia od  $f$  do  $g$ , to taka funkcja ciągła

$$\Phi : \mathbb{I} \times A \rightarrow B,$$

że dla dowolnego  $x \in A$  zachodzi

$$\Phi(0, x) = f(x) \quad \text{i} \quad \Phi(1, x) = g(x)$$

# Te drogi nie są homotopijne



# Hierarchy of equality types

**Fakt 3:** Jeśli  $A : \mathcal{U}_i$  oraz  $x =_A y$ , to

$$(x =_A x) =_{\mathcal{U}_i} (y =_A y).$$

**Dowód:** Indukcja.

$$C(x) : (y : A) \rightarrow (p : x =_A y) \rightarrow \mathcal{U}_{i+1}.$$

$$C(x, y, p) = ((x =_A x) =_{\mathcal{U}_i} (y =_A y)).$$

$$c(x) = ((x =_A x) =_{\mathcal{U}_i} (x =_A x)).$$

Uwaga: Dla  $x, y : A : \mathcal{U}_i$  jest  $(x =_A x) : \mathcal{U}_i$ , a równość  $(x =_A x) =_{\mathcal{U}_i} (y =_A y)$  jest w  $\mathcal{U}_{i+1}$ . Dowód używa rodziny  $C(x, y, p) = ((x =_A x) =_{\mathcal{U}_i} (y =_A y))$ , która jest w  $\mathcal{U}_{i+1}$ .

## Dlaczego...

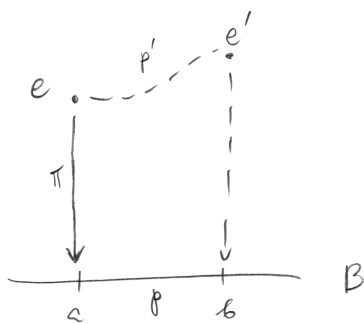
... z tego, że  $p : x =_A x$  nie wynika  $p = refl_A(x)$ ?

Odpowiedź topologiczna już była: bo nie każda pętla zwinie się do trywialnej, jeśli trzymamy końce.

Odpowiedź teorii typów: bo to nie typ  $x =_A x$  jest indukcyjny, ale rodzina  $\prod_{y:A} x =_A y$ .

Inaczej: indukcja musi być jednostajna ze względu na  $y$ .

## Fibracja



## Typ zależny to fibracja

Rodzina typów (typ zależny)  $P : B \rightarrow \mathcal{U}$  przypisuje każdemu obiektowi  $x : B$  pewien typ  $P(x)$ . Przestrzeń całkowita, to koprodukt  $E = \sum_{x:B} P(x)$  czyli  $E = (x : B) \times P(x)$ . Funktor  $\pi : E \rightarrow B$ , to pierwsze rzutowanie:  $\pi[x, u] = x$ .

Jeśli  $p : x =_B y$ , to  $p_* : P(x) \rightarrow P(y)$ .

Wtedy  $[x, u] =_E [y, p_*(u)]$ .

**Dowód:** Można stosować indukcję do rodziny

$$C(x, y, p) = ([x, u] =_E [y, p_*(u)]),$$

ponieważ  $[x, u] =_E [x, u] = [x, refl_A(x)^*(u)]$

# Czego się nie da udowodnić przez indukcję?

**Pytanie 1:** Skoro każda równość to tak naprawdę  $refl_A(x)$ , to czy z założenia  $p : x =_A y$  wynika  $p = refl_A(x)$ ?

**Odpowiedź:** Nie, bo  $p$  ma typ  $x =_A y$ , a  $refl_A(x)$  ma typ  $x =_A x$ . Równość  $p = refl_A(x)$  w ogóle nie ma sensu.

**Pytanie 2:** Czy z założenia  $p : x =_A x$  wynika

$$p =_{id_A(x,x)} refl_A(x)?$$

Nie, bo nie umiemy określić tezy indukcyjnej, tj. rodziny

$$C(x) : (y : A) \rightarrow (x =_A y) \rightarrow \mathcal{U},$$

żeby  $C(x, x, refl_A(x)) = (refl_A(x) =_{id_A(x,x)} refl_A(x))$

Bo tak  $C(x, y, p) = (p =_{??} refl_A(x))$  się nie da.

## Fibracja (rozwłóknienie)

Przestrzeń topologiczna to kategoria, gdzie morfizmy to drogi.

Fibracja to funktor  $\pi : E \rightarrow B$  o takiej własności:

Dla dowolnego  $e \in E$ :

jeśli  $\pi(e) = a$  oraz w przestrzeni  $B$  jest droga  $p$  od  $a$  do  $b$ , to istnieją  $e' \in E$  i taka droga  $p'$  od  $e$  do  $e'$ , że  $\pi(p') = p$

Przestrzeń  $E$  to „przestrzeń całkowita (totalna)”, a  $B$  to „przestrzeń bazowa”.

## Transport, czyli równość Leibniza

**Fakt 2:** Jeśli  $F : A \rightarrow B$ , oraz  $p : x =_A y$ , to istnieje funkcja  $p^* : Fx \rightarrow Fy$ .

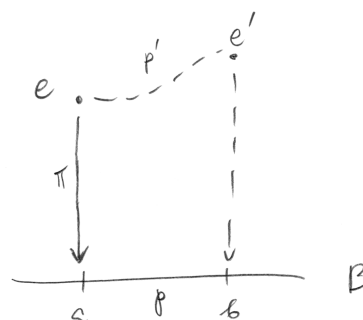
**Dowód:** Niech  $C(x, y, p) := (Fx \rightarrow Fy)$  oraz  $c(x, refl_A(x)) := id : Fx \rightarrow Fx$ . Wtedy

$$c(x, refl_A(x)) : C(x, x, refl_A(x)),$$

więc przez indukcję dostajemy  $f(x, y, p) : Fx \rightarrow Fy$ .

Uwaga:  $refl_A(x)^* = id$

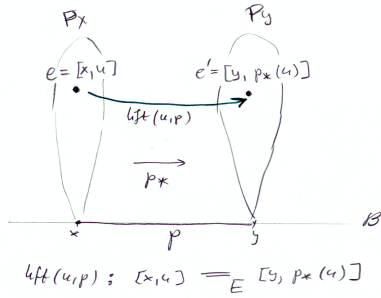
## Fibracja



## Typ zależny to fibracja

Jeśli  $p : x =_B y$ , to  $p_* : P(x) \rightarrow P(y)$ .

Wtedy :  $[x, u] =_E [y, p_*(u)]$ .



## Równoważność?

Jak zdefiniować równoważność (izomorfizm) dla typów?

Pierwsza próba: funkcja  $f : A \rightarrow B$  powinna mieć funkcję obustronnie odwrotną. Czyli ten typ powinien być niepusty:

$$qinv(f) := \sum_{g: B \rightarrow A} [(f \circ g \sim id_B) \times (g \circ f \sim id_A)]$$

Wada: Może być więcej niż jeden inhabitant w  $qinv(f)$ .

## Paradoks?

$$qinv(f) := \sum_{g: B \rightarrow A} [(f \circ g \sim id_B) \times (g \circ f \sim id_A)]$$

$$isequiv(f) := \sum_{g: B \rightarrow A} (f \circ g \sim id_B) \times \sum_{h: B \rightarrow A} (h \circ f \sim id_A)$$

- ▶ Warunki  $qinv(f)$  oraz  $isequiv(f)$  są logicznie równoważne.
- ▶ Jeśli  $e_1, e_2 : isequiv(f)$ , to  $e_1 =_{isequiv(f)} e_2$ .
- ▶ Ale jeśli  $e_1, e_2 : qinv(f)$  to niekoniecznie  $e_1 =_{qinv(f)} e_2$ .

Jakim cudem?

## Paradoks?

$$qinv(f) := \sum_{g: B \rightarrow A} [(f \circ g \sim id_B) \times (g \circ f \sim id_A)]$$

$$isequiv(f) := \sum_{g: B \rightarrow A} (f \circ g \sim id_B) \times \sum_{h: B \rightarrow A} (h \circ f \sim id_A)$$

Mamy  $e_1 = (g_1, P_1, Q_1)$  i  $e_2 = (g_2, P_2, Q_2)$  typu  $qinv(f)$ .

Wtedy  $e'_1 = (g_1, P_1, g_1, Q_1)$  i  $e'_2 = (g_2, P_2, g_2, Q_2)$

są typu  $isequiv(f)$  i są równe w typie  $isequiv(f)$ .

Dowód równości  $g_1 = g_2$  użyty dla pierwszej współrzędnej nie musi być taki sam jak użyty dla trzeciej współrzędnej.

A żeby dostać  $e_1 = e_2$  musimy mieć jeden dowód!

## Homotopia

Homotopia to ekstensjonalna równość funkcji (z  $A$  do  $B$ ):

$H : f \sim g$  to funkcja  $H : (a : A) \rightarrow f(a) =_B g(a)$ .

Interpretacja: Jeśli drogę  $p : f(a) =_B f(b)$  uważamy za funkcję  $p : [0, 1] \rightarrow B$ , to homotopia jest funkcją  $H : A \rightarrow [0, 1] \rightarrow B$ .

A to jest moralnie to samo, co  $H : [0, 1] \rightarrow (A \rightarrow B)$ .

## Równoważność

Lepszy pomysł: Funkcja  $f : A \rightarrow B$  jest równoważnością, jeśli ma obie funkcje odwrotne:

$$isequiv(f) := \sum_{g: B \rightarrow A} (f \circ g \sim id_B) \times \sum_{h: B \rightarrow A} (h \circ f \sim id_A)$$

Oznaczenie  $A \simeq B := \sum_{f: A \rightarrow B} isequiv(f)$ .

## Paradoks?

$$qinv(f) := \sum_{g: B \rightarrow A} [(f \circ g \sim id_B) \times (g \circ f \sim id_A)]$$

$$isequiv(f) := \sum_{g: B \rightarrow A} (f \circ g \sim id_B) \times \sum_{h: B \rightarrow A} (h \circ f \sim id_A)$$

Inhabitant  $e : qinv(f)$  to trójka  $(g, P, Q)$  gdzie  $g : B \rightarrow A$ , oraz  $P : f \circ g \sim id_B$  i  $Q : g \circ f \sim id_A$ .

Wtedy  $e' = (g, P, g, Q) : isequiv(f)$ .

Jeśli  $e_1 = (g_1, P_1, Q_1)$  i  $e_2 = (g_2, P_2, Q_2)$  są różne, to  $e'_1 = (g_1, P_1, g_1, Q_1)$  i  $e'_2 = (g_2, P_2, g_2, Q_2)$  są też różne?!

## Univalent Foundations

Funkcja  $f : A \rightarrow B$  jest równoważnością, jeśli ma obie funkcje odwrotne:

$$isequiv(f) := \sum_{g: B \rightarrow A} (f \circ g \sim id_B) \times \sum_{h: B \rightarrow A} (h \circ f \sim id_A)$$

Oznaczenie  $A \simeq B := \sum_{f: A \rightarrow B} isequiv(f)$ .

Dwie rzeczy, których nie da się udowodnić:

- ▶ Ekstensjonalność dla funkcji: Jeśli  $f \sim g$ , to  $f = g$ .
- ▶ Równoważność to równość: Jeśli  $A \simeq B$ , to  $A = B$ .

Postulujemy te własności jako aksjomaty.

## Aksjomat ekstensjonalności

Jeśli  $f, g : \prod_{x:A} B(x)$ , to równość  $f =_{\prod_{x:A} B(x)} g$  jest równoważna homotopii między  $f$  i  $g$ .

Ścisłej, definiujemy

$\text{happly}_{f,g} : (f =_{\prod_{x:A} B(x)} g) \rightarrow \prod_{x:A} (f(x) =_{B(x)} g(x))$

przez indukcję i przyjmujemy regułę:

$$\frac{\Gamma \vdash f : \prod_{x:A} B(x) \quad \Gamma \vdash g : \prod_{x:A} B(x)}{\Gamma \vdash \text{funext}(f, g) : \text{isequiv}(\text{happly}_{f,g})}$$

## Pożytek z uniwalencji

Utożsamiamy konstrukcje równoważne, np. typy izomorficzne:

$$(A \times B) \rightarrow C = A \rightarrow B \rightarrow C,$$

w tym typy indukcyjne *strukturalnie równoważne*,

albo izomorficzne struktury algebraiczne.

**Przykład:** półgrupa to obiekt  $(A, m, P)$  typu

$$\sum_{A:\mathcal{U}} \sum_{m:A \rightarrow A \rightarrow A} \forall_{x,y,z:A} m(x, m(y, z)) =_A m(m(x, y), z).$$

Równoważność półgrup to tyle, co izomorfizm.

Zatem izomorficzne półgrupy są identyczne.

## Metatwierdzenia

- ▶ Silna normalizacja.
- ▶ Niesprzeczność.
- ▶ Rozstrzygalność poprawności osądu  $\Gamma \vdash a : A$

## Wyższe typy indukcyjne

Typ składa się nie tylko z elementów, ale także z równości (dróg) między elementami, i z równości (homotopii) między drogami, i między homotopiami dróg, itd. (wyższy grupoid)

Konstrukторы typu indukcyjnego mogą (powinny?) definiować nie tylko *obiekty* ale także *drogi* (dowolnego rzędu).

## Aksjomat uniwalencji (jednowartościowości?)

Równość  $A =_{\mathcal{U}} B$  i równoważność

$$A \simeq B = \sum_{f:A \rightarrow B} \text{isequiv}(f)$$

są tym samym. Ścisłej, są równoważne:

$$(A =_{\mathcal{U}} B) \simeq (A \simeq B).$$

Definiujemy przez indukcję funkcję

$$\text{idtoeqv}_{A,B} : (A =_{\mathcal{U}} B) \rightarrow (A \simeq B)$$

i przyjmujemy regułę:

$$\frac{\Gamma \vdash A : \mathcal{U}_i \quad \Gamma \vdash B : \mathcal{U}_i}{\Gamma \vdash \text{univalence}_{A,B} : \text{isequiv}(\text{idtoeqv}_{A,B})}$$

dla nowej stałej  $\text{univalence}_{A,B}$

## Pożytek z uniwalencji

W języku homotopijnej teorii typów (HoTT) można formalizować konstrukcje matematyczne i dowody w sposób wygodny dla matematyka.

Formalna teoria homotopii dostarcza semantyki dla tego formalizmu.

## Klasyfikacja obiektów

- ▶ Typ  $A$  jest *zaledwie zdaniem* (mere proposition), gdy dla dowolnych  $x, y : A$  zachodzi  $x =_A y$ . (Proof irrelevance.)
- ▶ Typ  $A$  jest *zbiorem*, gdy dla dowolnych  $x, y : A$  i dowolnych  $p, q : x =_A y$  zachodzi  $p =_{x=A} y} q$ . Ścisłej: gdy niepusty jest typ  $\text{isSet}(A) := \prod_{x,y:A} \prod_{p,q:x=A} (p = q)$
- ▶ Typ  $A$  jest *1-typem*, gdy dla dowolnych  $x, y : A$ , dowolnych  $p, q : x =_A y$  i  $r, s : p =_{x=A} y} q$  zachodzi  $r =_{\dots} s$ .
- ▶ Dalej mamy 2-typy, 3-typy...

## Przykład 1: ilorz

To w Coqu nie przejdzie:

```

Inductive Quotient (A:Set)(R: A -> Prop) : Set :=
| klasa : A -> Quotient A R
| tosamo:(a,b:A) -> R a b -> (klasa a = klasa b).

```

## Przykład 2: okrąg

```

Inductive Circle : Type :=
| base : Circle
| loop : base = base.

```

Sens: Jeden punkt, ale nieskończenie wiele różnych pętli.

Grupa podstawowa okręgu to  $\mathbb{Z}$ .

## Indukcja dla okręgu

Definiujemy taką funkcję  $f : S^1 \rightarrow T$ , że  $f(\text{base}) = b : T$  oraz  $f(\text{loop}) = \ell : b =_T b$ .

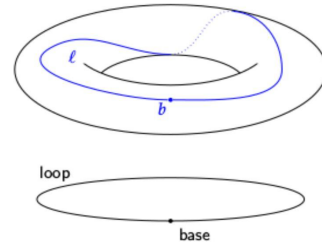


Figure 6.1: The topological induction principle for  $S^1$

Obrazek z *The HoTT Book*, <https://homotopytypetheory.org/book/>

## Indukcja dla okręgu, teoriiotypowo

Typ  $f : (x : S^1) \rightarrow P(x)$  jest zależny, więc  $b \in P(\text{base})$ . Droga  $\ell$  musi leżeć wewnątrz włókna  $P(\text{base})$ , ale „ponad” loop.

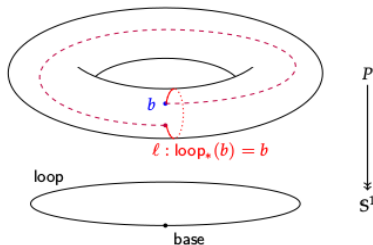


Figure 6.2: The type-theoretic induction principle for  $S^1$

Obrazek z *The HoTT Book*, <https://homotopytypetheory.org/book/>

## Przykład 4: sfera

```

Inductive Sphere : Type :=
| base : Sphere
| surf : refl_base =_{base=base} refl_base

```

Sens: Jeden punkt, jedna trywialna pętla, ale nieskończenie wiele różnych homotopii dla tej jednej pętli.

Grupa podstawowa sfery jest trywialna, ale jej druga grupa homotopii to  $\mathbb{Z}$ .

## Przykład 3: torus

```

Inductive Torus : Type :=
| base : Sphere
| tędy, owędy : base = base.
| abel : tędy o owędy = owędy o tędy.

```

Sens: Jeden punkt, dwie permutowalne pętle,

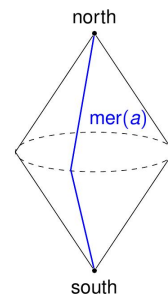
Grupa podstawowa torusa, to  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .

## Przykład 5: suspension (zawieszenie?)

```

Inductive susp (A:Type) : Type :=
| north : susp A
| south : susp A
| mer : A -> (north = south).

```



Obrazek z <http://home.sandiego.edu/~shulman/hottseminar2012/>

Więcej tutaj: <https://homotopytypetheory.org/book/>

## Homotopy Type Theory

UNIVALENT FOUNDATIONS OF MATHEMATICS

