Logika i teoria typów

Wykład 3

2 listopada 2020

Przypominijmy, że:

- Formuła jest twierdzeniem intuicjonistycznym wtedy i tylko wtedy, gdy jest prawdziwa w każdej algebrze pseudoboole'owskiej (Heytinga);
- Rodzina zbiorów otwartych przestrzeni topologicznej tworzy algebrę Heytinga.

Przykład przestrzeni topologicznej

Niech $\langle A, \leq \rangle$ - częściowy porządek.

Zbiór $B \subseteq A$ jest otwarty, gdy z $a \geq b \in B$ wynika $a \in B$.

Na przykład $a\!\uparrow = \{b \mid a \leq b\}$.

To jest przestrzeń topologiczna:
Zbiory $\varnothing$, A, suma i iloczyn otwartych są otwarte.

Wnętrze: $\mathrm{Int}(A) = \{a \mid a\!\uparrow \subseteq A\}$.

Pseudodopełnienie:

$$A \Rightarrow B = \mathrm{Int}(-A \cup B) = \{a \mid a\!\uparrow \subseteq -A \cup B\} = \{a \mid A \cap a\!\uparrow \subseteq B\}$$

$$A \Rightarrow B = \{a \mid \forall x (a \leq x \in A \to x \in B)\}$$

Semantyka Kripkego

Definicja: *Model Kripkego:* struktura $\mathcal{C} = \langle C, \leq, \Vdash \rangle$, gdzie:

- C jest zbiorem *stanów*;
- $\leq$ jest częściowym porządkiem;
- $\Vdash \subseteq C \times \{p, q, r, \ldots\}$;
- jeśli $c \Vdash p$ i $c \leq c'$, to $c' \Vdash p$.

Wymuszanie

Definicja: Rozszerzamy $\Vdash$ na dowolne formuły:

- $c \Vdash \varphi \vee \psi \quad \equiv \quad c \Vdash \varphi$ lub $c \Vdash \psi$;
- $c \Vdash \varphi \wedge \psi \quad \equiv \quad c \Vdash \varphi$ i $c \Vdash \psi$;
- $c \Vdash \varphi \to \psi \quad \equiv \quad$ jeśli $c \leq c' \Vdash \varphi$, to $c' \Vdash \psi$;
- $c \nVdash \bot$;
- $c \Vdash \neg\varphi \quad \equiv \quad$ jeśli $c \leq c'$, to $c' \nVdash \varphi$.

Monotoniczność:

Jeśli $c \Vdash \varphi$ oraz $c \leq c'$, to $c' \Vdash \varphi$.

Przykład

$$\begin{tikzcd} & p, \not q \\ c : \not p, \not q \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & q, \not p \end{tikzcd}$$

$c \nVdash p \vee \neg p \qquad c \Vdash (p \to q) \to q, \qquad c \Vdash \neg\neg(p \vee q)$

Spełnianie w sensie Kripkego

- $\mathcal{C} \Vdash \varphi$, gdy $c \Vdash \varphi$, dla wszystkich $c \in C$.
- $\mathcal{C} \Vdash \Gamma$, gdy $\mathcal{C} \Vdash \varphi$, dla wszystkich $\varphi \in \Gamma$.
- $\Gamma \Vdash \varphi$, gdy $\mathcal{C} \Vdash \Gamma$ zawsze pociąga $\mathcal{C} \Vdash \varphi$
- $\Vdash \varphi$, gdy $\mathcal{C} \Vdash \varphi$, dla wszystkich $\mathcal{C}$.

Poprawność

Fakt: *Jeśli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Gamma \Vdash \varphi$.*

Dowód: Indukcja ze względu na dowód $\Gamma \vdash \varphi$.

Np. jeśli $\Gamma \Vdash \alpha \vee \beta$ oraz $\Gamma, \alpha \Vdash \gamma$ i $\Gamma, \beta \Vdash \gamma$,
to łatwo widzieć, że $\Gamma \Vdash \gamma$.

Pozostałe przypadki też łatwe (ćwiczenia?).

Inaczej: Model Kripkego to w istocie pewna topologia.

Pełność w sensie Kripkego

Twierdzenie: $\Gamma \vdash \varphi$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $\Gamma \Vdash \varphi$

Możliwy dowód: Pokazać, że $\Gamma \Vdash \varphi$ implikuje $\Gamma \models \varphi$ i skorzystać z pełności w sensie Heytinga.

W tym celu buduje się model Kripkego z *filtrów* danej algebry Heytinga.

Ale my to zrobimy inaczej...

Rachunek zdań jako gra (politycznie niepoprawna)

Mamy dwoje graczy: $\forall$frodytę i $\exists$rosa. $\exists$ros próbuje skonstruować dowód, $\forall$frodyta szuka błędu.

Przykład: $(p \to \neg q) \to (\neg p \to \neg q) \to \neg q$

Inaczej: $x : p \to \neg q, \quad y : \neg p \to \neg q, \quad z : q \quad \vdash \quad \bot$

Player ($\exists$): *I will prove* $\bot$ *using assumption* y !

Opponent ($\forall$): *Can you prove the 1st assumption* $\neg p$ *of* y*? That is, can you prove* $\bot$ *using an assumption* $v : p$*?*

Player ($\exists$): *Yes, I will use assumption* x !

Opponent ($\forall$): *Can you prove the 2nd assumption* q *of* x*?*

Player ($\exists$): *Sure, take* z !

Proof = strategy = inhabitant: $\lambda xyz.\, y(\lambda v.\, xvz)z$

Inny przykład: $\neg\neg(p \vee \neg p)$

$\exists$: $\neg\neg(p \vee \neg p)$!

$\forall$: $x : (p \vee \neg p) \to \bot \quad \vdash \bot$?

$\exists$: apply x !

$\forall$: $x : (p \vee \neg p) \to \bot \quad \vdash p \vee \neg p$?

$\exists$: $x : (p \vee \neg p) \to \bot \quad \vdash \neg p$!

$\forall$: $x : (p \vee \neg p) \to \bot, \quad y : p \quad \vdash \bot$?

$\exists$: apply x !

$\forall$: $x : (p \vee \neg p) \to \bot, \quad y : p \quad \vdash p \vee \neg p$?!

$\exists$: $x : (p \vee \neg p) \to \bot, \quad y : p \quad \vdash p$!

Rachunek zdań jako gra

Pozycja w grze to osąd $\Gamma \vdash \tau$. Jeśli $\tau = \alpha \vee \beta$, to α i β nazywamy *celami* w tej pozycji, w przeciwnym przypadku całe τ jest *celem*.

Mamy dwoje graczy: $\forall$frodytę i $\exists$rosa. $\exists$ros próbuje skonstruować dowód, $\forall$frodyta szuka błędu.

Każda runda gry to ruch $\exists$rosa i odpowiedź $\forall$frodyty. $\exists$ros wybiera (a) założenie $\alpha \in \Gamma$, lub (b) cel α w τ, po czym $\forall$frodyta ustala następną pozycję.

$\exists$ros wygrywa w *pozycji końcowej*: gdy $\bot \in \Gamma$, lub $\tau \in \Gamma$ (można żądać aby τ było atomem).

$\forall$frodyta wygrywa, jeśli rozgrywka jest nieskończona.

Reguły gry

a1) If α is an assumption $\beta \to \gamma$ then $\forall$phrodite chooses between positions $\Gamma, \gamma \vdash \tau$ and $\Gamma \vdash \beta$.

a2) If α is an assumption $\beta \vee \gamma$ then $\forall$phrodite chooses between positions $\Gamma, \beta \vdash \tau$ and $\Gamma, \gamma \vdash \tau$.

a3) If α is an assumption $\beta \wedge \gamma$ then $\forall$phrodite has no choice and the next position is $\Gamma, \beta, \gamma \vdash \tau$.

b1) If α is a goal $\beta \to \gamma$ then $\forall$phrodite has no choice and the next position is $\Gamma, \beta \vdash \gamma$.

b2) If α is a goal $\beta \wedge \gamma$ then $\forall$phrodite chooses between positions $\Gamma \vdash \beta$ and $\Gamma \vdash \gamma$.

b3) If α is an atom or a disjunction goal then $\forall$phrodite has no choice and the next position is $\Gamma \vdash \alpha$.

Strategia $\exists$rosa to dowód

W pozycji $\Gamma \vdash \tau$:

- wybór założenia $\alpha \in \Gamma$ to wybór dowodu przez eliminację typu zmiennej $x : \alpha$.
- wybór celu α w τ, to wybór dowodu przez wprowadzenie (konstrukcję) α.

Strategia $\exists$rosa to dowód

Indukcja ze względu na rozmiary strategii $\exists$rosa:

Pozycje końcowe:

- $\Gamma, x : \tau \vdash x : \tau$;
- $\Gamma, x : \bot \vdash \varepsilon_\tau(x) : \tau$;

Strategia $\exists$rosa to dowód

Indukcja ze względu na rozmiary strategii $\exists$rosa.

$\exists$ros wybiera założenie $(x : \alpha) \in \Gamma$:

a1) If α is an assumption $\beta \to \gamma$ then $\forall$phrodite chooses between positions $\Gamma, \gamma \vdash \tau$ and $\Gamma \vdash \beta$.

Jeśli $\exists$ros wygrywa w obu pozycjach $\Gamma, \gamma \vdash \tau$ i $\Gamma \vdash \beta$, to są termy $\Gamma, y : \gamma \vdash M : \tau$ oraz $\Gamma \vdash N : \beta$.

Wtedy $\Gamma \vdash M[y := x^{\beta\to\gamma}N] : \tau$.

Strategia ∃rosa to dowód

Indukcja ze względu na rozmiary strategii ∃rosa:

∃ros wybiera założenie $(x : \alpha) \in \Gamma$:

a2) If α is an assumption $\beta \vee \gamma$ then ∀phrodite chooses between positions $\Gamma, \beta \vdash \tau$ and $\Gamma, \gamma \vdash \tau$.

Jeśli ∃ros wygrywa w obu pozycjach $\Gamma, \beta \vdash \tau$ i $\Gamma, \gamma \vdash \tau$, to są termy $\Gamma, y : \beta \vdash M : \tau$ oraz $\Gamma, z : \gamma \vdash N : \tau$

Wtedy $\Gamma \vdash \mathsf{case}\ x^{\beta\vee\gamma}\ \mathsf{of}\ [y]\, M\ \mathsf{or}\ [z]\, N : \tau$.

Strategia ∃rosa to dowód

Indukcja ze względu na rozmiary strategii ∃rosa.

∃ros wybiera założenie $(x : \alpha) \in \Gamma$:

a3) If α is an assumption $\beta \wedge \gamma$ then ∀phrodite has no choice and the next position is $\Gamma, \beta, \gamma \vdash \tau$.

Jeśli $\Gamma, y : \beta, z : \gamma \vdash M : \tau$, to

$$\Gamma \vdash M[y := x^{\beta\wedge\gamma}\{1\}][z := x^{\beta\wedge\gamma}\{2\}] : \tau.$$

Strategia ∃rosa to dowód

Indukcja ze względu na rozmiary strategii ∃rosa.

∃ros chooses a goal α in position $\Gamma \vdash \alpha \vee \rho$:

b1) If α is a goal $\beta \to \gamma$ then ∀phrodite has no choice and the next position is $\Gamma, \beta \vdash \gamma$.

Przypuśćmy że $\Gamma, y : \beta \vdash M : \gamma$. Wtedy $\Gamma \vdash \lambda x : \beta.\, M^{\gamma} : \alpha$.

Jeśli $\tau = \alpha \vee \rho$, to $\Gamma \vdash \mathrm{in}_1(\lambda x : \beta.\, M) : \tau$.

Strategia ∃rosa to dowód

Indukcja ze względu na rozmiary strategii ∃rosa.

∃ros chooses a goal α in position $\Gamma \vdash \alpha \vee \rho$:

b2) If α is a goal $\beta \wedge \gamma$ then ∀phrodite chooses between positions $\Gamma \vdash \beta$ and $\Gamma \vdash \gamma$.

Jeśli $\Gamma \vdash M : \beta$ oraz $\Gamma \vdash N : \gamma$, to $\Gamma \vdash \langle M, N\rangle : \alpha$.

Dla $\tau = \alpha \vee \rho$ mamy $\Gamma \vdash \mathrm{in}_1(\langle M, N\rangle) : \tau$.

Strategia ∃rosa to dowód

Indukcja ze względu na rozmiary strategii ∃rosa.

∃ros chooses a goal α in position $\Gamma \vdash \alpha \vee \rho$:

b3) If α is an atom or a disjunction then ∀phrodite has no choice and the next position is $\Gamma \vdash \alpha$.

Jeśli $\Gamma \vdash M : \alpha$ oraz $\tau = \alpha \vee \rho$, to $\Gamma \vdash \mathrm{in}_1(M) : \tau$.

A jeśli ∃ros nie ma strategii?

Co to znaczy, że ∃ros ma strategię w pozycji $\mathcal{P}$?

- Pozycja $\mathcal{P}$ jest końcowa, lub istnieje taki ruch ∃rosa, że każda odpowiedź ∀frodyty prowadzi do pozycji, w której ∃ros ma strategię.

Co to znaczy, że ∃ros nie ma strategii w pozycji $\mathcal{P}$?

- Pozycja $\mathcal{P}$ nie jest końcowa, oraz dla każdego ruchu ∃rosa, istnieje odpowiedź ∀frodyty, która prowadzi do pozycji, gdzie ∃ros nie ma strategii.

To znaczy, że ∀frodyta umie grać nieskończenie długo. Czyli to ona ma strategię. Ta gra jest *zdeterminowana*.

Strategia ∀frodyty, czyli *refutacja*

Strategia ∀frodyty, to drzewo S etykietowane pozycjami niekońcowymi, spełniające taki warunek:

- Dla każdego ruchu ∃rosa w dowolnym wierzchołku $\mathcal{P}$, istnieje odpowiedź ∀frodyty, prowadząca do pewnego następnika wierzchołka $\mathcal{P}$ w drzewie S.

Dygresja: własność skończonej strategii

Strategia ∀frodyty jest nieskończonym drzewem zbudowanym ze skończenie wielu różnych pozycji. Na każdej gałęzi pozycje się od pewnego miejsca powtarzają. Po pierwszym takim powtórzeniu sędzia powinien przerwać grę.

Zatem strategia (refutacja) to w istocie skończony obiekt.

Strategia $\forall$frodyty: notacja

Niech S będzie strategią wygrywającą $\forall$frodyty.

- Jeśli $\mathcal{P} = (\Gamma \vdash \tau)$, to $\Gamma_{\mathcal{P}} = \Gamma$ i $\tau_{\mathcal{P}} = \tau$.
- Jeśli pozycja $\mathcal{P}'$ jest w S następnikiem pozycji $\mathcal{P}$, to piszemy $S : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$.

Strategia $\forall$frodyty to kontrmodel Kripkego

Pierwsze koty za płoty:

– Stany modelu to pozycje w strategii;
– porządek to $\twoheadrightarrow$;
– wymuszanie $\mathcal{P} \Vdash p$, gdy $p \in \Gamma_P$;
– chcemy $\mathcal{P} \Vdash \alpha$, gdy $\alpha \in \Gamma_P$.

Tak jest niedobrze: Niech $\mathcal{P} = (p \to q,\ p \vdash r)$.
Wtedy $\mathcal{P} \nVdash p \to q$, bo $\mathcal{P} \Vdash p$, ale $\mathcal{P} \nVdash q$.

Dopiero w następnej pozycji $\mathcal{P}' = (p \to q, p, q \vdash r)$ mamy $\mathcal{P}' \Vdash p \to q$.

Pozycja nasycona

Pozycja $\mathcal{P}$ jest *nasycona*, gdy każda runda „statyczna" (bez zmiany tezy) jest trywialna (nie wprowadza nowych założeń).

Lemat: *W strategii wygrywającej $\forall$frodyty, dla dowolnej pozycji $\mathcal{P}$ istnieje taka nasycona pozycja $\mathcal{Q}$, że $\mathcal{P} \twoheadrightarrow_s \mathcal{Q}$ i $\tau_{\mathcal{Q}} = \tau_{\mathcal{P}}$.*

Dowód: Strategia przewiduje wszystkie ruchy $\exists$rosa.
Jest ścieżka, gdzie każda runda jest statyczna.
Dodawanie nowych założeń musi się skończyć.

Model

- Stany modelu to pozycje nasycone w strategii.
- Porządek to $\twoheadrightarrow$.
- Wymuszanie $\mathcal{P} \Vdash p$, gdy $p \in \Gamma_P$.

Lemat: *Let $\mathcal{P} = (\Gamma \vdash \tau)$ be a saturated position in a winning strategy S.*

If α is an assumption in $\mathcal{P}$ then $\mathcal{P} \Vdash \alpha$, and if α is a goal in $\mathcal{P}$, then $\mathcal{P} \nVdash \alpha$.

Dowód: Indukcja ze względu na α.

Dowód lematu

Lemat: *Jeśli $\mathcal{P}$ nasycona, to $\mathcal{P} \Vdash \Gamma_{\mathcal{P}}$ i $\mathcal{P} \nVdash \tau_P$*

Dowód: Przypadek założenia $\alpha = \beta \to \gamma$.

Niech $\mathcal{P} \leq \mathcal{Q}$ i $\mathcal{Q} \Vdash \beta$. Formuła α jest założeniem w $\mathcal{Q}$, więc $\exists$ros może wskazać α w pozycji $\mathcal{Q}$. Jeśli $\forall$frodyta odpowie $\Gamma_{\mathcal{Q}} \vdash \beta$, to istnieje taka nasycona pozycja $\mathcal{R} \geq \mathcal{Q}$, że $\tau_{\mathcal{R}} = \tau_{\mathcal{Q}} = \beta$. Wtedy $\mathcal{R} \nVdash \beta$ z założenia indukcyjnego o β oraz $\mathcal{R} \Vdash \beta$, ponieważ $\mathcal{Q} \leq \mathcal{R}$. Sprzeczność.

Zatem $\forall$frodyta musi przejść do $\Gamma_{\mathcal{Q}}, \gamma \vdash \tau_{\mathcal{P}}$.
To jest runda statyczna, a $\mathcal{Q}$ jest nasycona, więc $\gamma \in \Gamma_{\mathcal{Q}}$.
Zatem $\mathcal{Q} \Vdash \gamma$ z założenia indukcyjnego o γ.

Dowód lematu

Lemat: *Jeśli $\mathcal{P}$ nasycona, to $\mathcal{P} \Vdash \Gamma_{\mathcal{P}}$ i $\mathcal{P} \nVdash \tau_P$*

Dowód: Przypadek celu postaci $\beta \wedge \gamma$. Wtedy jedna z pozycji $\Gamma \vdash \beta$, $\Gamma \vdash \gamma$ należy do strategii i rozszerza się do nasyconej pozycji $\mathcal{R}$, gdzie $\tau_{\mathcal{R}} = \beta$ (lub odpowiednio $\tau_{\mathcal{R}} = \gamma$).
Z założenia indukcyjnego $\mathcal{R} \nVdash \beta$ lub $\mathcal{R} \nVdash \gamma$.
Ponieważ $\mathcal{P} \leq \mathcal{R}$, więc tym bardziej $\mathcal{P} \nVdash \beta$ lub $\mathcal{P} \nVdash \gamma$.

Przypadek celu atomowego p: pozycja należy do strategii wygrywającej $\forall$frodyty, więc $p \notin \Gamma_{\mathcal{P}}$.

Inne przypadki podobnie.

Główny lemat

Lemat: *Jeśli $\forall$frodyta ma strategię w pozycji $\mathcal{P} = (\Gamma_{\mathcal{P}} \vdash \tau_{\mathcal{P}})$, to $\Gamma_P \nVdash \tau_{\mathcal{P}}$.*

Dowód: Istnieje pozycja nasycona $\mathcal{Q} \geq \mathcal{P}$.

Uwaga:
I na odwrót: kontrmodel wyznacza pewną strategię $\forall$frodyty.

Pełność Kripkego

Twierdzenie: *Dla dowolnego osądu $\Gamma \vdash \tau$:*

– albo istnieje dowód $\Gamma \vdash M : \tau$,

– albo istnieje kontrmodel, tj. $\Gamma \nVdash \tau$.

Wniosek: *Jeśli $\Gamma \Vdash \tau$, to $\Gamma \vdash \tau$.*

Własność skończonego modelu

Twierdzenie:

Jeśli $\mathcal{C} \Vdash \varphi$ dla wszystkich skończonych modeli $\mathcal{C}$, to $\Vdash \varphi$.

Dowód: Model otrzymany ze strategii ∀frodyty jest nieskończony, ale od pewnego miejsca stany się powtarzają. Można obcinać nieskończone gałęzie po pierwszych powtórzeniach.

Twierdzenie Gliwienki

Twierdzenie:

Formuła zdaniowa α jest klasyczną tautologią wtedy i tylko wtedy, gdy $\neg\neg\alpha$ jest twierdzeniem intuicjonistycznym.

Dowód: ($\Leftarrow$) Oczywiste.

($\Rightarrow$) Wtedy α jest wymuszona w każdym stanie końcowym.

Prawo alternatywy (disjunction property)

Twierdzenie: *Jeśli $\vdash \alpha \vee \beta$, to $\vdash \alpha$ lub $\vdash \beta$.*

Dowód: Przypuśćmy, że $\nvdash \alpha$ i $\nvdash \beta$.
Wtedy są kontrprzykłady Kripkego: $\mathcal{C}_1, c_1 \nVdash \alpha$ i $\mathcal{C}_2, c_2 \nVdash \beta$.

Nowy model: $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \{c_0\}$, gdzie c_0 nowy i najmniejszy. Relacja $\Vdash$ jest sumą relacji z $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$. W stanie c_0 nie są wymuszane żadne zmienne zdaniowe.

Jeśli $\vdash \alpha \vee \beta$, to także $c_0 \Vdash \alpha \vee \beta$, skąd $c_0 \Vdash \alpha$ lub $c_0 \Vdash \beta$.
Ale wtedy także $c_1 \Vdash \alpha$ lub $c_2 \Vdash \beta$.

Własność podformuł dla gier

Lemat: *Wszystkie formuły używane w grze rozpoczętej w pozycji początkowej $\varnothing \vdash \tau$ są podformułami formuły τ.*

W szczególności spójniki logiczne występujące w takiej grze to są tylko te spójniki, które są w τ.

Dowód: Indukcja.

Konserwatywność

Wniosek: *Jeśli ∃ros ma strategię w pozycji $\varnothing \vdash \tau$, gdzie τ jest formułą implikacyjną (typem prostym), to τ ma inhabitanta w zwykłym rachunku lambda.*

Dowód: Wszystkie formuły są implikacyjne, więc każda runda ma postać (a1) lub (b1). Term, który opisuje strategię ∃rosa zawiera więc tylko abstrakcje i aplikacje.

Wniosek: *Typ prosty jest niepusty wtedy i tylko wtedy, gdy jest tautologią intuicjonistyczną.*

Jakie termy są strategiami ∃rosa?

W przypadku implikacyjnym możliwe strategie są takie:

- zmienne;
- $M[y := xN]$, gdzie M, N – strategie;
- $\lambda x : \beta.\, M$, gdzie M – strategia.

To są dokładnie postaci normalne beta:

- Abstrakcje: $\lambda x : \beta.\, M$;
- Eliminatory: $xN_1 \dots N_k$.

Typ eliminatora jest "końcówką" typu zmiennej czołowej.

Pełność i „normalizacja" w jednym

Twierdzenie: *Dla dowolnego osądu $\Gamma \vdash \tau$:*

– albo istnieje normalny inhabitant $\Gamma \vdash M : \tau$,

– albo istnieje kontrmodel, tj. $\Gamma \nVdash \tau$.

Wniosek: *Jeśli osąd ma dowód, to ma dowód normalny.*

Inaczej:
Jeśli jakikolwiek term M ma typ τ w otoczeniu Γ, to istnieje term tego typu w postaci normalnej.

Postaci normalne (fragment implikacyjny)

Konstruktory: $\lambda x : \alpha.\, N$

Dobre eliminatory: $xN_1 \dots N_k$

Poszukiwanie dowodu normalnego:

To prove τ, use an assumption with suffix τ.
Otherwise proof is a constructor.

Algorytm Ben-Yellesa

To answer $\Gamma \vdash ? : \alpha$, apply one of the following tactics:

- For $\alpha = \beta \to \gamma$, ask $\Gamma \cup \{x : \beta\} \vdash ? : \gamma$ (fresh x).

  (Solution $M = \lambda x{:}\beta.\, N^{\gamma}$.)

- Find $x : \beta_1 \to \cdots \to \beta_k \to \alpha$ in Γ,
  then ask $\Gamma \vdash ? : \beta_i$, for all i. Success if $k = 0$.

  (Solution $M = x N_1^{\beta_1} \ldots N_k^{\beta_k}$.)

W drugim przypadku można żądać aby α była zmienną.