Logika i teoria typów

Wykład 1

19 października 2020

O czym będzie ten wykład:

O różnych systemach logicznych,
w których typy odgrywają istotną rolę.

Punkt widzenia: Izomorfizm Curry'ego-Howarda

- Formuła = typ = specyfikacja;
- Dowód = program = implementacja;
- Normalizacja dowodu = obliczenie.
- Konstrukcja dowodu = obliczenie.

Klasyczny slogan: *Proofs into programs!*

Nowy slogan: *Programs into proofs!*

O czym będzie ten wykład:

- Powtórzenie z rachunku lambda (turbo).
- Logika intuicjonistyczna.
- Logika jako gra dialogowa.
- Podstawy logiki liniowej.
- Logika klasyczna, kontynuacje i wyjątki.
- Polimorfizm.
- Typy zależne.
- Rachunek konstrukcji i jego uogólnienia.
- Co to jest Coq?
- Typy indukcyjne i rekurencyjne.
- Homotopijna teoria typów.

Powtórzenie z rachunku lambda

Zbiory i funkcje

Sposób użycia:
$a \in A$ (należenie) $F(a)$ (aplikacja)

Tworzenie:
$\{x \mid W(x)\}$ (wycinanie) $\lambda x\, W(x)$ (abstrakcja)

Ewaluacja:
$a \in \{x \mid W(x)\} \quad \Leftrightarrow \quad W(a)$ $\quad (\lambda x\, W(x))(a) = W(a)$

Ekstensjonalność (?)

Dla zbiorów (niewątpliwa):

$A = B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall x\, (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

$$A = \{x \mid x \in A\}$$

Dla funkcji (wątpliwa):

$F = G$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall x\, (F(x) = G(x))$

$$F = \lambda x\, Fx \quad ([1])$$

[1] Gdy F nie zawiera x.

Beztypowy rachunek lambda

Lambda-wyrażenia:

- Zmienne $x, y, z, \ldots$
- Aplikacje (MN);
- Abstrakcje $(\lambda x\, M)$.

Konwencje:

- Opuszczamy zewnętrzne nawiasy;
- Aplikacja wiąże w lewo: MNP oznacza $(MN)P$
- Skrót z kropką: $\lambda x_1 \ldots x_n.M$ oznacza $\lambda x_1(\ldots(\lambda x_n M)\cdots)$.

Przykłady

$$\begin{aligned}
\mathsf{I} &= \lambda x.x \\
\mathsf{K} &= \lambda xy.x \\
\mathsf{S} &= \lambda xyz.xz(yz) \\
\mathsf{2} &= \lambda fx.\, f(fx) \\
\omega &= \lambda x.xx \\
\Omega &= \omega\omega \\
\mathsf{Y} &= \lambda f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx)))
\end{aligned}$$

Zmienne *wolne* (globalne)

$\mathrm{FV}(x) = \{x\}$;

$\mathrm{FV}(MN) = \mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{FV}(N)$;

$\mathrm{FV}(\lambda x\, M) = \mathrm{FV}(M) - \{x\}$.

Alfa-konwersja

Wyrażenia $\lambda x.\, xy$ i $\lambda z.\, zy$ oznaczają tę samą operację („zaaplikuj dany argument do y”).

Należy je uważać za identyczne.

Alfa-konwersja: Wyrażenia różniące się tylko wyborem zmiennych związanych utożamiamy.

Lambda-termy to klasy abstrakcji tego utożsamienia.

Beta-redukcja

Najmniejsza relacja $\to_\beta$, spełniająca warunki:

- $(\lambda x P)Q \to_\beta P[x := Q]$;
- jeśli $M \to_\beta M'$, to:
  $MN \to_\beta M'N$, $NM \to_\beta NM'$ oraz $\lambda x M \to_\beta \lambda x M'$.

Term postaci $(\lambda x P)Q$ to β-*redeks*.

Relacja $\to_\beta$ to zredukowanie jednego dowolnego redeksu.

Relacje pochodne:

Dowolna liczba kroków: $\twoheadrightarrow_\beta$ lub $\to_\beta^*$;

Niezerowa liczba kroków: $\to_\beta^+$;

Co najwyżej jeden krok: $\to_\beta^=$;

Równoważność (beta-konwersja): $=_\beta$.

Postaci normalne

Postać normalna to term bez redeksów.

Nie da się go redukować.

Termy w postaci β-normalnej są takie:

- Abstrakcje: $\lambda x.\, M$, (gdzie M normalny);
- Eliminatory: $xN_1 \dots N_k$, (gdzie $N_1, \dots, N_k$ normalne).

Inaczej: termy postaci $\lambda x_1 \dots x_n.yN_1 \dots N_k$.

Normalizacja

Term M *ma postać normalną* (*jest normalizowalny*), gdy redukuje się do pewnej postaci normalnej.

Nazywamy ją *postacią normalną* termu M.

Term M jest *silnie normalizowalny* ($M \in \mathrm{SN}$), gdy nie istnieje nieskończony ciąg

$$M = M_0 \to_\beta M_1 \to_\beta M_2 \to_\beta \cdots$$

Inaczej: każdy ciąg redukcji prowadzi do postaci normalnej.

Przykłady

- Term $\mathbf{S} = \lambda xyz.xz(yz)$ jest w postaci normalnej.
- Term **SKK** jest silnie normalizowalny i ma postać normalną **I**.
- Term $\mathbf{\Omega} = (\lambda x.\, xx)(\lambda x.\, xx)$ nie ma postaci normalnej.
- Term $(\lambda x.\, y)\mathbf{\Omega}$ ma postać normalną y, ale nie jest silnie normalizowalny.

Twierdzenie Churcha-Rossera (CR)

Jeśli $M \twoheadrightarrow P$ i $M \twoheadrightarrow Q$, to istnieje takie R, że $P \twoheadrightarrow R$ i $Q \twoheadrightarrow R$.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ P \arrow[dr, dashed] & & Q \arrow[dl, dashed] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Wniosek: *Jeśli $M =_\beta N$, to $M \twoheadrightarrow_\beta Q\,{}_\beta\!\twoheadleftarrow N$, dla pewnego Q.*

Wniosek: *Każdy term ma co najwyżej jedną postać normalną.*

Siła wyrazu

Curry's fixed point combinator $\mathbf{Y}$

$$\mathbf{Y} = \lambda f((\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

Fact: $\mathbf{Y}F =_\beta F(\mathbf{Y}F)$, for every F.

Proof: $\mathbf{Y}F \to_\beta (\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx)) \to_\beta$
$F((\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx)))\ {}_\beta\!\leftarrow F(\mathbf{Y}F)$

$\mathbf{Y}F =_\beta F(\mathbf{Y}F)$

Example: Find an M such that $Mxy =_\beta MxxyM$.

Solution: No problem, $M = \mathbf{Y}(\lambda m\, \lambda xy.\, mxxym)$.

Church's numerals

$$c_n = \mathbf{n} = \lambda fx.f^n(x),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \lambda fx.x; \\ \mathbf{1} &= \lambda fx.fx; \\ \mathbf{2} &= \lambda fx.f(fx); \\ \mathbf{3} &= \lambda fx.f(f(fx)), \text{ etc.} \end{aligned}$$

Nierozstrzygalność

Twierdzenie: *Funkcja (częsciowa) jest definiowalna w rachunku lambda wtedy i tylko wtedy, gdy jest (częsciowo) rekurencyjna.*

Wnioski: The following are undecidable problems:

- Given M and N, does $M \twoheadrightarrow_\beta N$ hold?
- Given M and N, does $M =_\beta N$ hold?
- Given M, does M normalize?
- Given M, does M strongly normalize?

Logika kombinatoryczna (Rachunek kombinatorów)

Terms:

- Variables;
- Constants K and S;
- Applications (FG).

The "weak" reduction

- $KFG \to_w F$;
- $SFGH \to_w FH(GH)$;
- If $F \to_w G$, then $FH \to_w GH$ and $HF \to_w HG$.

Notation $\twoheadrightarrow_w$, $=_w$ etc. used as usual.

Examples of combinators

- $\mathsf{I} = \mathsf{SKK}$
  $\mathsf{I}F \to_w \mathsf{K}F(\mathsf{K}F) \to_w F$
- $\Omega = \mathsf{SII}(\mathsf{SII})$
  $\Omega \to_w \mathsf{I}(\mathsf{SII})(\mathsf{I}(\mathsf{SII})) \twoheadrightarrow_w \Omega$
- $\mathsf{W} = \mathsf{SS}(\mathsf{KI})$
  $\mathsf{W}FG \to_w \mathsf{S}F(\mathsf{KI}F)G \to_w \mathsf{S}F\mathsf{I}G \to_w FG(\mathsf{I}G) \twoheadrightarrow_w FGG$

Examples of combinators

- $0 = \mathsf{KI}$ $\qquad 0FG \twoheadrightarrow_w G$
- $1 = \mathsf{SB}(\mathsf{KI})$ $\qquad 1FG \twoheadrightarrow_w FG$
- $2 = \mathsf{SB}(\mathsf{SB}(\mathsf{KI}))$ $\qquad 2FG \twoheadrightarrow_w F(FG)$

From lambda to CL: combinatory abstraction

- $\lambda^*x.F = \mathsf{K}F$, when $x \notin \mathrm{FV}(F)$;
- $\lambda^*x.x = \mathsf{I}$;
- $\lambda^*x.FG = \mathsf{S}(\lambda^*x.F)(\lambda^*x.G)$, otherwise.

Fakt: $(\lambda^*x.F)G \twoheadrightarrow_w F[x := G]$.

Fixed point combinators

$$\mathsf{Y} = \mathsf{WS}(\mathsf{BWB})$$

$$\Theta = \mathsf{WI}(\mathsf{B}(\mathsf{SI})(\mathsf{WI}))$$

NCL - "Naive Combinatory Logic"

Terms: If F, G are terms then $\mathsf{P}FG$ is a term.
Write $F \Rightarrow G$ for $\mathsf{P}FG$.

Formulas:
– Every term F is a formula;
– Equations $F = G$ are formulas.

NCL - Axioms and rules

Axioms:

$$F = F \qquad \mathsf{K}FG = F \qquad \mathsf{S}FGH = FH(GH)$$

$$F \Rightarrow F \qquad (F \Rightarrow (F \Rightarrow G)) \Rightarrow (F \Rightarrow G)$$

Rules:

$$\frac{M = N}{MQ = NQ} \qquad \frac{M = N}{QM = QN}$$

$$\frac{M = N}{N = M} \qquad \frac{M = N, N = Q}{M = Q}$$

$$\frac{M, \quad M = N}{N} \qquad \frac{M, \quad M \Rightarrow N}{N}$$

Curry's Paradox

Take any term F and define $N = \mathsf{Y}(\lambda^*x.\ x \Rightarrow F)$.

Then $N = N \Rightarrow F$ in NCL.

Using axiom $N \Rightarrow N$ it follows that $N \Rightarrow (N \Rightarrow F)$.

Thus $N \Rightarrow F$, using $(N \Rightarrow (N \Rightarrow F)) \Rightarrow (N \Rightarrow F)$.

This proves N, because $N = N \Rightarrow F$.

Eventually, F follows by modus ponens.

Moral: System NCL is logically inconsistent.

Przerwa na reklamę

Konsultacje: wtorki 11:30-13

https://us02web.zoom.us/j/84593508534?pwd=SUFPYmdEL0kxeFVML0daVlJUT0xNdz09

Moodle:
https://moodle.mimuw.edu.pl/course/view.php?id=564

MIM Rocket:
https://chat.mimuw.edu.pl/group/Jx2cswK4GwdJPet8o

Logika intuicjonistyczna

Motywujący przykład

CURIOSA

339. A Simple Proof That a Power of an Irrational Number to an Irrational Exponent May Be Rational. $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ is either rational or irrational. If it is rational, our statement is proved. If it is irrational, $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 2$ proves our statement.

DOV JARDEN

JERUSALEM

340. A Minor Curiosity.

$$11 \times 372 = 4092 \text{ and } 11 \times 273 = 3003$$
$$12 \times 341 = 4092 \text{ and } 21 \times 143 = 3003$$
$$31 \times 132 = 4092 \text{ and } 13 \times 231 = 3003.$$

ROYAL V. HEATH

(*Scripta Mathematica*, 19:229, 1953)

Alternatywne rozwiązania:

- Udowodnić, że $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ jest liczbą niewymierną;
- Sprawdzić, że $(\sqrt{2})^{2\log_2 3} = 3$.

Jeszcze jeden przykład

Zadanie: *Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb $e+\pi$ i $e\pi$ nie jest algebraiczna.*

Rozwiązanie: W przeciwnym razie współczynniki wielomianu $x^2 - x(e+\pi) + e\pi = (x-e)(x-\pi)$ są algebraiczne, więc algebraiczne są też pierwiastki.

Wielki wynalazek

Koncepcja wartości logicznej:

- Każde poprawnie zbudowane zdanie orzekające jest *prawdziwe* albo *fałszywe*.
- Wartość logiczna zdania złożonego zależy tylko od wartości logicznych jego składowych.
- W szczególności implikacja jest *materialna*:
  znaczenie zdania „jeśli A to B" ma się nijak do
  – związku przyczynowo-skutkowego,
  – następstwa w czasie,
  – zakresu znaczeniowego, itp.

Małe odkrycia

- Koncepcja wartości logicznej to *wynalazek*.
  Jest to pewien *model* naszego wnioskowania.
- Każdy model opisuje tylko część rzeczywistości.
  Dygresja:
  - *Joe pojechał na targ i kupił osła;*
  - *Kupił osła, chyba że przepił pieniądze;*
  - *Teraz jeśli ma osła, to go bije.*
- Mogą być inne modele i inne wynalazki.

Brouwer: paradygmat konstrukcji

- Dwuwartościowa logika to nadmierne uproszczenie:
  Czy w rozwinięciu dziesiętnym liczby π występuje gdzieś siedem siódemek pod rząd?
- Istnienie obiektów matematycznych nie jest absolutne, ich źródłem jest *podmiot kreatywny*.
- Dowód istnienia obiektu wymaga więc jego *konstrukcji*.
- To samo dotyczy prawdy matematycznej:
  "There are no non-experienced truths" (Brouwer)
- Wnioskowanie jest pierwotne, semantyka jest wtórna.

Brouwer-Heyting-Kołmogorow

- Sens spójnika logicznego: sposób w jaki konstrukcja zdania złożonego zależy od konstrukcji składowych.
- *Konstrukcja dla $\varphi \wedge \psi$ polega na podaniu konstrukcji dla φ i konstrukcji dla ψ;*
- *Konstrukcja dla $\varphi \vee \psi$ polega na wskazaniu jednego ze składników φ, ψ i podaniu konstrukcji dla tego składnika.*

Brouwer-Heyting-Kołmogorow

- *Konstrukcja dla implikacji $\varphi \to \psi$ to metoda (funkcja) przekształcająca każdą konstrukcję przesłanki φ w konstrukcję dla konkluzji ψ.*
- *Nie ma konstrukcji dla fałszu $\perp$. („the thing which is not").*

Negacja: $\neg\varphi = \varphi \to \perp$.

- *Konstrukcja dla $\neg\varphi$ to metoda obracająca każdą ewentualną konstrukcję φ w absurd*

Składnia rachunku zdań

- *Zmienne zdaniowe* $(p, q, r, \ldots)$ są formułami.
- Stała $\perp$ jest formułą.
- Jeśli α i β są formułami to

$$(\alpha \to \beta), \quad (\alpha \vee \beta), \quad (\alpha \wedge \beta)$$

  też są formułami.

Skróty i konwencje

- Napis $\neg\alpha$ jest skrótem napisu $\alpha \to \perp$.
- Napis $\top$ jest skrótem napisu $\perp \to \perp$.
- Napis $\alpha \leftrightarrow \beta$ jest skrótem napisu $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.
- Zewnętrzne nawiasy opuszczamy.
- Implikacja wiąże w prawo:
  $\alpha \to \beta \to \gamma$ oznacza $\alpha \to (\beta \to \gamma)$.
- Priorytety:
  1. Negacja,
  2. Koniunkcja i alternatywa,
  3. Implikacja i równoważność.

Przykłady łatwe

- $p \to p$;
- $p \to (p \to q) \to q$;
- $p \to \neg\neg p$, czyli $p \to (p \to \perp) \to \perp$;
- $(p \to q) \to (q \to r) \to p \to r$;
- $(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$;
- $(p \wedge q \to r) \leftrightarrow (p \to q \to r)$;
- $(p \vee q \to r) \to (p \to r) \wedge (q \to r)$;
- $\neg(p \vee q) \to \neg p \wedge \neg q$.

Trochę mniej oczywiste

- $(p \to q \to r) \to (p \to q) \to p \to r$;
- $p \to q \to p$;
- $\perp \to p$;
- $(p \vee q) \to \neg p \to q$, w szczególności:
- $(p \vee \neg p) \to \neg\neg p \to p$;

Całkiem wątpliwe

- $\neg\neg p \to p$;
- $\neg p \vee p$;
- $(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$;
- $\neg(p \wedge q) \to (\neg p \vee \neg q)$;
- $(p \to q) \to (\neg p \to q) \to q$;
- $p \vee (p \to q)$;
- $((p \to q) \to p) \to p$ (prawo Peirce'a).

Zasada wyłączonego środka nie ma konstrukcji

...because reason taught us to affirm or deny

only where we are certain;

and beyond our knowledge we cannot do either.

(Jonathan Swift, *Gulliver's Travels*)

Przykłady nieoczywiste, ale poprawne:

- $\neg\neg(p \vee \neg p)$;
- $(p \to \neg q) \to (\neg p \to \neg q) \to \neg q$;
- Wiele innych podobnych.

Przykład: Konstrukcja dla $\neg\neg(p \vee \neg p)$:

Należy otrzymać absurd $\perp$ z założenia $\neg(p \vee \neg p)$.
W tym celu skonstruujemy $p \vee \neg p$, wskazując na $\neg p$.
Zakładamy więc p i znowu:
Należy otrzymać absurd $\perp$ z założenia $\neg(p \vee \neg p)$.
W tym celu skonstruujemy $p \vee \neg p$, wskazując na $\ldots p$!

Implementacja BHK: naturalna dedukcja

- Reguły *wprowadzania*[2] spójników logicznych: jak można udowodnić formułę danej postaci?
- Reguły *eliminacji* spójników: jak można wykorzystać formułę tej postaci do udowodnienia innej?

[2] introduction

Tradycyjna notacja dla naturalnej dedukcji: implikacja

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \tau \to \sigma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \tau\end{matrix}}{\sigma} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}\cancel{\tau}\\ \vdots\\ \sigma\end{matrix}}{\tau \to \sigma}$$

Tradycyjna notacja dla naturalnej dedukcji: implikacja

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \tau \to \sigma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \tau\end{matrix}}{\sigma} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}[\tau]\\ \vdots\\ \sigma\end{matrix}}{\tau \to \sigma}$$

Tradycyjna notacja dla naturalnej dedukcji: implikacja

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \tau \to \sigma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \tau\end{matrix}}{\sigma} \qquad\qquad \dfrac{\begin{matrix}[\tau]_i\\ \vdots\\ \sigma\end{matrix}}{\tau \to \sigma}\, i$$

Normalizacja dowodu: implikacja

$$\dfrac{\begin{matrix}(*)\\ \vdots\\ \tau\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}[\tau]^{(i)}\\ \vdots\\ \sigma\end{matrix}}{\tau \to \sigma}\,(i)}{\sigma} \quad\Longrightarrow\quad \begin{matrix}(*)\\ \vdots\\ \tau\\ \vdots\\ \sigma\end{matrix}$$

Dowód w stylu Jaśkowskiego

> Załóżmy $(p \to q) \to p$
>
> > Załóżmy $\neg p$.
> >
> > > Załóżmy p.
> > > Ponieważ p oraz $\neg p$, więc $\bot$.
> > > Ponieważ $\bot$, więc q.
> >
> > Zatem $p \to q$
> > Ponieważ $p \to q$ oraz $(p \to q) \to p$, więc p.
> > Ponieważ p i $\neg p$, więc $\bot$.
>
> Zatem $\neg\neg p$.

Zatem $((p \to q) \to p) \to \neg\neg p$.

Notacja w stylu Gentzena

Dowodzimy *osądów*[3] postaci $\Gamma \vdash A$, gdzie Γ jest zbiorem formuł, a A jest formułą. Sens: A wynika z założeń Γ.

Przykład:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p,\ p \wedge q\ \vdash\ \neg p \qquad \dfrac{\neg p,\ p \wedge q\ \vdash\ p \wedge q}{\neg p,\ p \wedge q\ \vdash\ p}\,(\mathrm{E}\wedge)}{\neg p, p \wedge q\ \vdash\ \bot}\,(\mathrm{E}\neg)}{\neg p\ \vdash\ \neg(p \wedge q)}\,(\mathrm{W}\neg)}{\vdash\ \neg p \to \neg(p \wedge q)}\,(\mathrm{W}\to)$$

[3] judgments

Reguły wnioskowania dla rachunku zdań...

... są w pliku duch.mimuw.edu.pl/~urzy/Litt/reguly_nd.pdf

i oczywiście na Moodlu.

Reguły wnioskowania dla rachunku zdań (1)

$$\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,(\mathrm{Ax})$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\,(\mathrm{W}\wedge) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\,(\mathrm{E}\wedge) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\,(\mathrm{E}\wedge)$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash A \to B}{\Gamma \vdash B}\,(\mathrm{E}\to) \qquad \dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\,(\mathrm{W}\to)$$

Reguły wnioskowania dla rachunku zdań (2)

$$\dfrac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\,(\mathrm{W}\vee) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\,(\mathrm{W}\vee)$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\,(\mathrm{E}\vee)$$

$$\dfrac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,(\mathrm{W}\neg) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash \neg A \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \bot}\,(\mathrm{E}\neg)$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,(\mathrm{E}\bot)$$

Classical (unnatural) deduction

$$\dfrac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\text{Cheat})$$

Inna reguła eliminacji koniunkcji

$$\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B \qquad \Gamma, A, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

Przykład

Niech $\Gamma = \{p \to q \to r, p \to q, p\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash p \to q \to r \quad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q \to r}\,(\to \mathsf{E}) \qquad \dfrac{\Gamma \vdash p \to q \quad \Gamma \vdash p}{\Gamma \vdash q}\,(\to \mathsf{E})}{\Gamma \vdash r}\,(\to \mathsf{E})}{p \to q \to r, p \to q \vdash p \to r}\,(\to \mathsf{I})}{p \to q \to r \vdash (p \to q) \to p \to r}\,(\to \mathsf{I})}{\vdash (p \to q \to r) \to (p \to q) \to p \to r}\,(\to \mathsf{I})$$

Przykład

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(p{\to}p){\to}q,\ p \vdash p}{(p{\to}p){\to}q \vdash p{\to}p}\,(\mathrm{W}{\to}) \qquad (p{\to}p){\to}q \vdash (p{\to}p){\to}q}{(p{\to}p){\to}q \vdash q}\,(\mathrm{E}{\to})}{\vdash ((p{\to}p){\to}q) \to q}\,(\mathrm{W}{\to})$$

Notacja dla dowodów

$$\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma$$

$$\dfrac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash M \lightning x : \sigma : \sigma \to \tau}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\,@\,N : \tau}$$

Notacja dla dowodów

$$\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma$$

$$\dfrac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lightning x : \sigma . M : \sigma \to \tau}$$

$$\dfrac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\,@\,N : \tau}$$

Notacja dla dowodów

$$\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x : \sigma .\, M : \sigma \to \tau}$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash M\, N : \tau}$$

Właśnie wymyśliliśmy rachunek lambda z typami prostymi.

Normalizacja dowodu to beta-redukcja

$$\dfrac{\begin{array}{c}(*)\\ \vdots\\ \tau\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\tau]^{(i)}\\ \vdots\\ \sigma\end{array}}{\tau \to \sigma}\,(i)}{\sigma} \quad\Longrightarrow\quad \begin{array}{c}(*)\\ \vdots\\ \tau\\ \vdots\\ \sigma\end{array}$$

$$(\lambda x^{\tau}\, M^{\sigma})N^{\tau} \implies M[x := N] : \sigma.$$