Egzamin poprawkowy z logiki i teorii typów,
25 lutego 2021

1. Rozszerzamy język rachunku zdań o nowy jednoargumentowy spójnik $\sharp$. W modelach Kripkego przyjmujemy, że $c \Vdash \sharp\,\alpha$, wtedy i tylko wtedy, gdy stany wymuszające α tworzą „przekrój” ponad c, tj. w każdym maksymalnym (skończonym lub nieskończonym) ciągu rosnącym $c = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots$ jest takie c_n, że $c_n \Vdash \alpha$.

   Proszę udowodnić:

   (a) że $\Vdash \sharp\,\alpha \to \neg\neg\alpha$, ale nie na odwrót.

   (b) że spójnik $\sharp$ nie jest definiowalny w intuicjonistycznym rachunku zdań.

2. Formuła $\neg\neg(\forall x\, P(x) \vee \exists x\, \neg P(x))$ nie jest intuicjonistycznym twierdzeniem. Proszę podać kontrprzykład topologiczny i kontrprzykład Kripkego.

3. Strumienie można reprezentować w rachunku lambda na kilka sposobów. Pierwszy używa operatora największego punktu stałego ν. Definiujemy typ $\mathtt{stream} := \nu p.\, \mathtt{int} \times p$ z operacjami $\mathit{Coit}_\sigma : (\sigma \to \mathtt{int} \times \sigma) \to \sigma \to \mathtt{stream}$ i $\mathit{Unfold} : \mathtt{stream} \to \mathtt{int} \times \mathtt{stream}$, dla których przyjmujemy regułę redukcji $\mathit{Unfold}(\mathit{Coit}_\sigma\, f\, M^\sigma) \Rightarrow \mathit{Lift}_\sigma(\mathit{Coit}_\sigma f)(f\, M^\sigma)$. Operacja $\mathit{Lift}_\sigma : (\sigma \to \mathtt{stream}) \to (\mathtt{int} \times \sigma) \to (\mathtt{int} \times \mathtt{stream})$ „podnosi” typ argumentu: $\mathit{Lift}_\sigma(\varphi)$ działa jak φ na prawej współrzędnej, tj. $\mathit{Lift}_\sigma(\varphi)(\langle n, s\rangle) := \langle n, \varphi s\rangle$.

   Wyrażenie $\mathit{Nats} := \mathit{Coit}_{\mathtt{int}}(\lambda n.\, \langle n, n+1\rangle)0$ przedstawia strumień wszystkich liczb naturalnych. Jeśli zdefiniujemy $\mathit{head}(s) := \pi_1(\mathit{Unfold}(s))$ i $\mathit{tail}(s) := \pi_2(\mathit{Unfold}(s))$, to aplikacja $\mathit{head}(\mathit{Nats})$ zredukuje się do zera, a aplikacja $\mathit{tail}(\mathit{Nats})$ zredukuje się do strumienia $\mathit{Coit}_{\mathtt{int}}(\lambda n.\, \langle n, n+1\rangle)1$, który zaczyna się od jedynki.

   (a) Proszę zdefiniować operację $\mathit{razydwa} : \mathtt{stream} \to \mathtt{stream}$, która mnoży wszystkie wyrazy strumienia przez dwa. Powinno być tak, że $\mathit{head}(\mathit{razydwa}\, s) = 2 \cdot \mathit{head}(s)$ oraz $\mathit{tail}(\mathit{razydwa}\, s) = \mathit{razydwa}(\mathit{tail}\, s)$. Symbol równości oznacza konwersję.

   Drugi sposób wymaga użycia typu egzystencjalnego $\mathtt{stream} := \exists p.\, p \times (p \to \mathtt{int} \times p)$. Teraz strumień wszystkich liczb naturalnych to np. $\mathit{Nats} := [\mathtt{int}, \langle 0, \lambda n.\, \langle n, n+1\rangle\rangle]$.

   (b) Proszę zdefiniować operacje head, tail i $\mathit{razydwa}$ dla takich strumieni.

   Trzeci sposób to definicja typu $\mathtt{stream}$ w systemie $\mathbf{F}$.

   (c) Proszę zdefiniować $\mathtt{stream}$ w systemie $\mathbf{F}$ używając tylko operatorów $\to$ i $\forall$. Dla takiego typu $\mathtt{stream}$ proszę zdefiniować Nats i operacje head, tail i $\mathit{razydwa}$.

Rozwiązania

1: Jeśli stan c wymusza $\sharp\,\alpha$, to żaden przyszły stan $c_1 > c$ nie może wymuszać formuły $\neg\alpha$. Inaczej moglibyśmy zbudować rosnący ciąg stanów, który „omija" α. A zatem $\Vdash \sharp\,\alpha \to \neg\neg\alpha$.

Rozpatrzmy teraz model Kripkego o zbiorze stanów $\mathbb{N}$ i z takim porządkiem: liczby parzyste są uporządkowane jak zwykle, a każda liczba nieparzysta $2k+1$ jest większa od liczb $2n$ dla $n \leq k$ i nieporównywalna ze wszystkimi pozostałymi liczbami. Atom p jest wymuszony we wszystkich stanach nieparzystych. Wtedy $0 \Vdash \neg\neg\alpha$, ale $0 \nVdash \sharp\,\alpha$, bo ciąg stanów parzystych „omija" α.

$$\begin{tikzcd}
 & 1 & 3 & 5 & 7 \\
0 \arrow[r] \arrow[ur] & 2 \arrow[r] \arrow[ur] & 4 \arrow[r] \arrow[ur] & 6 \arrow[r] \arrow[ur] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ten efekt jest możliwy tylko w modelu nieskończonym. W modelach skończonych stany końcowe tworzą przekrój, w takich modelach mamy więc wymuszoną równoważność $\neg\neg p \leftrightarrow \sharp\,p$. Gdyby $\sharp\,p$ było równoważne jakiejś formule β, to w każdym modelu skończonym mielibyśmy też $\beta \leftrightarrow \neg\neg p$. Ponieważ intuicjonistyczny rachunek zdań ma własność skończonego modelu, formuła $\beta \leftrightarrow \neg\neg p$ byłaby intuicjonistycznym twierdzeniem i w konsekwencji formuły $\neg\neg p$ i $\sharp\,p$ też byłyby równoważne.

2: Kontrprzykładem topologicznym jest $\mathcal{O}(\mathbb{R})$-struktura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, P^{\mathcal{A}} \rangle$, w której $P^{\mathcal{A}}(w) = \mathbb{R} - \{w\}$ dla $w \in \mathbb{Q}$. Znaczeniem formuły $\forall y\, P(y)$ jest wtedy wnętrze zbioru $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ czyli zbiór pusty. Znaczeniem formuły $\exists x\, \neg P(x)$ też jest zbiór pusty, a podwójna negacja z przodu nic tu nie zmieni.

Kontrprzykład Kripkego dla tej formuły ma postać $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N}, \leq, \{\mathcal{A}_n \mid n \in \mathbb{N}\} \rangle$, gdzie $\mathcal{A}_n = \langle \mathbb{N}, P^n \rangle$ oraz $P^n = \{0, \ldots, n\}$, dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ w każdym stanie n są elementy nie należące do P^n, więc $n \nVdash \forall y\, P(y)$. Ale nie ma też elementów spełniających $\neg P(x)$, bo każdy prędzej czy później znajdzie się w zbiorze P^m dla pewnego $m \geq n$. Zatem $n \nVdash \exists x\, \neg P(x)$. A więc w każdym stanie n wymuszona jest formuła $\neg(\forall x\, P(x) \vee \exists x\, \neg P(x))$, co oczywiście wyklucza podwójną negację.

3a: $\mathit{razydwa} := \lambda s^{\mathtt{stream}}.\, \mathit{Coit}_{\mathtt{stream}}(\lambda t^{\mathtt{stream}}\, \langle 2 \cdot (\mathit{head}\, t), \mathit{tail}\, t) \rangle) s\,.$

3b: $\mathit{head} := \lambda s^{\mathtt{stream}}.\, \mathsf{unpack}\; s\; \mathsf{as}\; [p, X^{p \times (p \to \mathtt{int} \times p)}]\; \mathsf{in}\; \pi_1((\pi_2 X)(\pi_1 X)),$

$\mathit{tail} := \lambda s^{\mathtt{stream}}.\, \mathsf{unpack}\; s\; \mathsf{as}\; [p, X^{p \times (p \to \mathtt{int} \times p)}]\; \mathsf{in}\; [p, \langle \pi_2((\pi_2 X)(\pi_1 X)), \pi_2 X \rangle],$

$\mathit{razydwa} := \lambda s^{\mathtt{stream}}.\, \mathsf{unpack}\; s\; \mathsf{as}\; [p, X^{p \times (p \to \mathtt{int} \times p)}]\; \mathsf{in}\; [p, \langle \pi_1 X, \lambda x^p \langle 2 \cdot \pi_1(\pi_2 X x), \pi_2(\pi_2 X x) \rangle \rangle].$

3c: Kwantyfikator $\exists$ jest definiowalny w systemie $\mathbf{F}$, a currying eliminuje iloczyn kartezjański.

$\mathtt{stream} := \forall q(\forall p(p \to (p \to \mathtt{int}) \to (p \to p) \to q) \to q),$

$\mathit{Nats} := \Lambda q \lambda z^{\forall p(\ldots)}.\, z\, \mathtt{int}\, 0\, \mathit{id}\, \mathit{succ},$

$\mathit{head} := \lambda s^{\mathtt{stream}}.\, s\, \mathtt{int}(\Lambda p \lambda u^p \lambda v^{p \to \mathtt{int}} \lambda w^{p \to p}.\, vu),$

$\mathit{tail} := \lambda s^{\mathtt{stream}}.\, s\, \mathtt{stream}(\Lambda p \lambda u^p \lambda v^{p \to \mathtt{int}} \lambda w^{p \to p}.\, \Lambda q \lambda z^{\forall p(\ldots)}.\, zp(wu)vw),$

$\mathit{razydwa} := \lambda s^{\mathtt{stream}}.\, s\, \mathtt{stream}(\Lambda p \lambda u^p \lambda v^{p \to \mathtt{int}} \lambda w^{p \to p}.\, \Lambda q \lambda z^{\forall p(\ldots)}.\, zpu(\lambda u.\, 2 \cdot (vu))w).$