Egzamin z logiki i teorii typów, 6 lutego 2021
Zadania teoretyczne

3. Formuły $\gamma = \forall y\, P(y) \to \exists x\, Q(x)$ i $\delta = \exists x(P(x) \to Q(x))$ są klasycznie równoważne. Czy któraś z implikacji $\gamma \to \delta$, $\delta \to \gamma$ jest twierdzeniem intuicjonistycznym? W przypadku odpowiedzi pozytywnej należy skonstruować dowód, w razie odpoiedzi negatywnej proszę podać dwa kontrprzykłady: jeden topologiczny, drugi Kripkego.

4. Rozważamy rachunek lambda z typami prostymi, do którego dodajemy nowe stałe typowe i równania między typami. W każdym przypadku należy skonstruować term, który ma nieskończony ciąg redukcji.

   (a) Stałe typowe c_0, c_1, c_2 spełniają równania: $c_0 = c_1 \to p$, $c_1 = c_2 \to p$, $c_2 = c_0 \to p$. Wskazówka: rozpatrzmy termy: $C_0 = \lambda y_1^{c_1}.\, y_1 C_2$, $C_2 = \lambda y_0^{c_0}.\, y_0 C_1$, $C_1 = \lambda y_2^{c_2}.\, y_2 y_0$.

   (b) Teraz równania są $c_0 = c_1 \to \beta_0$, $c_1 = c_2 \to \beta_1$, $c_2 = c_0 \to \beta_2$, gdzie $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ są dowolnymi typami.

   (c) A teraz tak: $c_0 = \vec{\alpha}_0 \to c_1 \to \beta_0$, $c_1 = \vec{\alpha}_1 \to c_2 \to \beta_1$, $c_2 = \vec{\alpha}_2 \to c_0 \to \beta_2$, gdzie $\vec{\alpha}_0$, $\vec{\alpha}_1$, $\vec{\alpha}_2$ są dowolnymi ciągami typów.

   (d) No to przypuśćmy, że mamy równanie $c_0 = \tau(c_0)$, gdzie c występuje w τ na pozycji negatywnej. Co teraz? (W tej części wystarczy szkic dowodu bez szczegółów.)

Rozwiązanie 3: Implikacja $\delta \to \gamma$ jest twierdzeniem, którego dowód można zapisać w postaci lambda-termu: $\lambda X^{\delta} \lambda Y^{\forall y\, P(y)}.\, \mathsf{unpack}\ X\ \mathsf{as}\ [x, Z : P(x) \to Q(x)]\ \mathsf{in}\ [x, Z(Yx)]$.

Implikacja $\gamma \to \delta$ nie jest twierdzeniem, co najłatwiej zauważyć zamieniając $Q(x)$ na $\bot$. Wtedy $\gamma \to \delta$ to po prostu prawo De Morgana $\neg\forall y\, P(y) \to \exists x\, \neg P(x)$. Kontrprzykładem topologicznym jest $\mathcal{O}(\mathbb{R})$-struktura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{Q}, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}} \rangle$, w której $P^{\mathcal{A}}(w) = \mathbb{R} - \{w\}$ i $Q^{\mathcal{A}}(w) = \varnothing$, dla $w \in \mathbb{Q}$. Znaczeniem formuły $\forall y\, P(y)$ jest wtedy wnętrze zbioru $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ czyli zbiór pusty. A więc znaczeniem γ jest cała prosta, podczas gdy znaczenie δ jest puste. Kontrprzykład Kripkego dla tej formuły ma postać $\mathcal{C} = \langle \mathbb{N}, \leq, \{\mathcal{A}_n \mid n \in \mathbb{N}\} \rangle$, gdzie $\mathcal{A}_n = \langle \mathbb{N}, P^n, Q^n \rangle$ oraz $P^n = \{0, \ldots, n\}$, $Q^n = \varnothing$, dla $n \in \mathbb{N}$. Ponieważ w każdym stanie n są elementy nie należące do P^n, więc $n \nVdash \forall y\, P(y)$ czyli walkowerem $0 \Vdash \gamma$. Ale $0 \nVdash \delta$, bo każda liczba naturalna należy do pewnego P^n.

Rozwiązanie 4:

4a: $C_2 C_0 \twoheadrightarrow C_2 C_0$.

4b: Niech $C_0 = \lambda y_1^{c_1}.\, f_0(y_1 C_2)$, $C_2 = \lambda y_0^{c_0}.\, f_2(y_0 C_1)$, $C_1 = \lambda y_2^{c_2}.\, f_1(y_2 y_0)$, gdzie $f_0 : \beta_1 \to \beta_0$, $f_2 : \beta_0 \to \beta_2$, $f_1 : \beta_2 \to \beta_1$ są zmiennymi. Teraz $C_2 C_0 \twoheadrightarrow f_2(f_0(f_1(C_2 C_0)))$.

4c: Jak tak, to $C_0 = \lambda \vec{x}_0 y_1.\, f_0(y_1 \vec{z}_1 C_2)$, $C_2 = \lambda \vec{x}_2 y_0.\, f_2(y_0 \vec{z}_0 C_1)$, $C_1 = \lambda \vec{x}_1 y_2.\, f_1(y_2 \vec{z}_2 y_0)$ (tutaj zmienne $\vec{z}_1, \vec{z}_2, \vec{z}_0$ są wolne) i mamy redukcję: $C_2 \vec{z}_2 C_0 \twoheadrightarrow f_2(f_0(f_1(C_2 \vec{z}_2 C_0)))$.

4d: Jest droga w drzewie τ od korzenia do negatywnej pozycji, na której znajduje się c. Ta droga skręca w lewo nieparzystą liczbę razy, powiedzmy $2k+1$. To wyznacza ciąg typów $c_0, c_1, \ldots, c_{2k}, c_0$ spełniających równania podobne do tych w części (c), gdzie było $k = 1$.