Egzamin z logiki i teorii typów, 6 lutego 2021
Zadanie 1 dla wszystkich

1. Formuły $\alpha = (((e \to d) \to c) \to b) \to a$ i $\beta = (e \to (d \to a) \to b) \to (c \to b) \to a$ są klasycznie równoważne. Czy któraś z implikacji $\alpha \to \beta$, $\beta \to \alpha$ jest twierdzeniem intuicjonistycznym? W przypadku odpowiedzi pozytywnej należy skonstruować dowód, przy odpowiedzi negatywnej można np. wskazać model Kripkego (wystarczy jeden sposób). (Wskazówka: wystarczy model Kripkego o 2 stanach.)

Rozwiązanie 1: Kontrmodel Kripkego dla $\alpha \to \beta$ ma 2 stany, w pierwszym stanie nic nie jest wymuszone, w drugim wymuszone są atomy e, b, a. Kontrmodel dla $\beta \to \alpha$ jest taki sam, ale w drugim stanie wymuszone są e, d, a.

($\alpha \to \beta$) Implikacje $c \to b$, $d \to a$ są wymuszone wszędzie, $e \to d$ nigdzie, więc $(e \to d) \to c$ wszędzie, natomiast $((e \to d) \to c) \to b$ tylko w stanie 2. Ale $2 \Vdash a$, więc α jest wymuszone wszędzie. Ponadto $e \to (d \to a) \to b$ i $c \to b$ są wymuszone wszędzie, tymczasem $1 \nVdash a$.

($\beta \to \alpha$) Implikacje $c \to b$, $d \to a$, $e \to d$ są wymuszone wszędzie, zatem $(e \to d) \to c$ nigdzie i dalej $((e \to d) \to c) \to b$ wszędzie, więc $1 \nVdash \alpha$. Formuła $e \to (d \to a) \to b$ nie jest wymuszona nigdzie, bo w stanie 2 jest e. Zatem $1 \Vdash \beta$.

Inna metoda: pokazać, że nie istnieje term w postaci normalnej.

($\alpha \to \beta$) Jeśli $\Gamma = \{X : \alpha,\ Y : e \to (d \to a) \to b,\ Z : c \to b\}$, to trzeba wyprowadzić $\Gamma \vdash a$. Trzeba użyć X i udowodnić $\Gamma, (e \to d) \to c \vdash b$. Żeby użyć Y, trzeba udowodnić $\Gamma, (e \to d) \to c \vdash e$, co jest niemożliwe, bo żadne założenie nie kończy się na e. No to trzeba użyć Z i udowodnić $\Gamma, (e \to d) \to c, e \vdash d$, a to się też nie da, z podobnego powodu.

($\beta \to \alpha$) Niech $\Delta = \{V : ((e \to d) \to c) \to b,\ W : \beta\}$. Chcemy udowodnić $\Delta \vdash a$ i musimy użyć W. To wymaga dowodu dla $\Delta, e, d \to a \vdash b$ z użyciem V, czyli chcemy $\Delta, e, d \to a \vdash c$ i tu znowu nie ma założenia kończącego się na c.