Egzamin z logiki i teorii typów, 26 czerwca 2014

1. Niech $\alpha = \neg p \to q$ i niech $\beta = \neg\neg(p \vee q)$. Która z implikacji $\alpha \to \beta$ i $\beta \to \alpha$ jest twierdzeniem intuicjonistycznym?

2. Niech $\varphi = \forall x\,(P(x) \vee \neg P(x))$, $\psi = \neg\forall x\, P(x)$ oraz $\vartheta = \exists x \neg P(x)$. Która z implikacji $\varphi \wedge \psi \to \vartheta$ i $\varphi \wedge \vartheta \to \psi$ jest twierdzeniem intuicjonistycznym?

3. Niech $\tau = \forall r(\forall q(q \to r) \to r)$ i niech $\sigma = \forall p((\tau \to p) \to p)$. Napisać takie termy $\mathit{there} : \tau \to \sigma$ i $\mathit{back} : \sigma \to \tau$, że w systemie **F** zachodzi beta-równość $\mathbf{I} =_\beta \lambda x^\tau\, \mathit{back}(\mathit{there}\, x)$. Czy każdy term zamknięty typu σ jest beta-równy wyrażeniu postaci $\mathit{there}(N)$?

4. W systemie F definiujemy produkt $\tau \times \varrho$ jako $\tau \times \varrho = \forall p((\tau \to \varrho \to p) \to p)$. Para uporządkowana $\langle M^\tau, N^\varrho \rangle$ to term $\Lambda p \lambda x^{\tau \to \varrho \to p}.\, xMN$.

   Podać przykład takich typów τ i ϱ, że typ $\tau \times \varrho$ ma „za dużo elementów” tj. istnieje term zamknięty tego typu w postaci normalnej, który nie jest parą uporządkowaną.

5. Obiekty typu *krzak* to drzewa, których liście są etykietowane liczbami naturalnymi, a wierzchołki wewnętrzne mają stopień wyjściowy trzy i nie są etykietowane. Jak można zdefiniować typ *krzak*:

   (a) w składni systemu Coq lub podobnej?

   (b) w systemie **F**?

   (c) w rachunku lambda z operatorem μ i konstruktorami $\times$, $\oplus$, int?

   Jak wygląda zasada indukcji dla typu *krzak*?

Rozwiązania

1: Pierwsza tak: dla $x : \alpha$, $y : \neg(p \vee q)$ jest $y[\mathsf{inr}(x(\lambda z^p.\, y(\mathsf{inl}\,\mathsf{z})))] : \bot$.

Druga nie: kontrmodel Kripkego ma dwa stany $c < d$, w stanie c nic nie jest wymuszone, w stanie d jest wymuszone q.

2 Pierwsza nie. Kontrmodel Kripkego ma dwa stany $c < d$ i dziedziny $\mathcal{A}_c = \{0\}$, $\mathcal{A}_d = \{0, 1\}$. W obu strukturach do relacji P należy tylko 0. Kontrmodel topologiczny to $\mathcal{H}$-struktura o dziedzinie $\mathcal{A} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, gdzie $\mathcal{H}$ jest algebrą otwartych podzbiorów $\mathbb{Q}$. Relację P interpretujemy jako funkcję określoną tak: $P^{\mathcal{A}}(r) = \mathbb{Q} \cap (-r, r)$.

Druga tak. Dowód można zapisać jako lambda term

$$\lambda X^{\varphi \wedge \vartheta}.\, \mathsf{unpack}\ X\{2\}\ \mathsf{as}\ [x, Y{:}\neg P(x)]\ \mathsf{in}\ \lambda Z^{\forall x\, P(x)}.\, Y(Zx)$$

3: Niech $\mathit{there} = \lambda z^{\tau} \Lambda p \lambda y^{\tau \to p}.\, yz$ i $\mathit{back} = \lambda x^{\sigma}.\, x\tau\mathbf{I}$. Term $\Lambda p \lambda y^{\tau \to p}.y(\Lambda r \lambda u^{\forall q\,(q \to r)}.\, u(\tau \to p)\, y)$ ma typ σ i nie jest postaci $\mathit{there}(N)$.

4: Przyjmiemy τ jak w poprzednim zadaniu i $\varrho = \forall r\,(r \to r)$. Wtedy wyrażenie

$$\Lambda p \lambda x^{\tau \to \varrho \to p}.\, x(\Lambda r \lambda u^{\forall q\,(q \to r)}.\, u(\tau \to \varrho \to p)x)\mathbf{I}$$

ma typ $\tau \times \varrho$ i nie jest parą uporządkowaną.

5: W Coqu napiszemy

```
Inductive krzak : Set :=
| node : krzak -> krzak -> krzak -> krzak
| leaf : nat -> krzak
```

i dostaniemy taką zasadę indukcji:

```
krzak_ind
     : forall P : krzak -> Prop,
       (forall k : krzak,
        P k ->
        forall k0 : krzak,
        P k0 -> forall k1 : krzak, P k1 -> P (node k k0 k1)) ->
       (forall n : nat, P (leaf n)) -> forall k : krzak, P k
```

W systemie **F** zdefiniujemy $\mathit{krzak} = \forall p\,((\omega \to p) \to (p \to p \to p \to p) \to p)$,
a trzecia możliwość to $\mathit{krzak} = \mu p.\, \mathsf{int} \oplus (p \times p \times p)$.