Egzamin z logiki intuicjonistycznej
5 lutego 2005

1. Proszę wykazać, że żadna z następujących formuł nie jest intuicjonistyczną tautologią. Które z nich są wymuszane przez dowolny liniowo uporządkowany model Kripkego?
   (a) $\neg p \vee \neg\neg p$;
   (b) $(p \to q) \vee (q \to p)$;
   (c) $(p \to q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$.
2. Czy każdy zbiór liniowo uporządkowany z elementem pierwszym i ostatnim jest algebrą Heytinga? Czy istnieje związek pomiędzy liniowo uporządkowanymi modelami Kripkego i liniowo uporządkowanymi algebrami Heytinga?
3. Korzystając ze znanych własności rachunku lambda z typami prostymi, proszę ustalić, czy następujące formuły są intuicjonistycznymi twierdzeniami:
   (a) $((p \to q) \to r) \to (p \to r) \to r$;
   (b) $((((p \to q) \to r) \to (p \to r) \to r) \to q) \to q$.
4. Które implikacje pomiędzy następującymi formułami są intuicjonistycznie prawdziwe?
   (a) $\neg\forall x\, P(x)$;
   (b) $\neg\forall x\, \neg\neg P(x)$;
   (c) $\neg\neg\exists x\, \neg P(x)$.

Rozwiązania

Zadanie 1: Jeśli w algebrze otwartych podzbiorów $\mathbb{R}$ zinterpretujemy p jako $(-\infty, 0)$, oraz q jako $(0, \infty)$, to znaczeniem formuł (1a) i (1b) będzie zbiór $\mathbb{R} - \{0\}$. Obie te formuły są jednak wymuszane przez dowolny model liniowo uporządkowany. Formuła (1b) dlatego, że jeden ze zbiorów $\{c \mid c \Vdash p\}$ i $\{c \mid c \Vdash q\}$ musi (z powodu monotoniczności) zawierać drugi. A formuła (1a) dlatego, że $c \nVdash \neg p$ jest możliwe tylko wtedy, gdy $c' \Vdash p$ dla pewnego $c' \geq c$. Ale wtedy dla dowolnego stanu c'' istnieje takie c''', że $c''' \Vdash p$.

Natomiast dla formuły (1c) kontrprzykładem liniowym jest model dwuelementowy, w którym $c < c'$, a relacja $\Vdash$ jest taka, że $c \nVdash p, q$ oraz $c' \Vdash p, q$.

Zadanie 2: Porządek liniowy jest oczywiście kratą. Jeśli $a \leq b$, to pseudodopełnieniem $a \Rightarrow b$ jest 1, w przeciwnym razie mamy $a \Rightarrow b = b$. Zatem mamy algebrę Heytinga (krata jest dystrybutywna, bo zawsze istnieje pseudodopełnienie).

Formuła zdaniowa jest wymuszana we wszystkich liniowo uporządkowanych modelach Kripkego wtedy i tylko wtedy gdy jest prawdziwa we wszystkich liniowo uporządkowanych algebrach Heytinga. Implikacja z lewej do prawej wynika stąd, że filtrami pierwszymi w liniowo uporządkowanej algebrze Heytinga są wszystkie podzbiory zamknięte w górę. Zatem filtry te są liniowo uporządkowane przez inkluzję i jeśli zbudujemy z nich model Kripkego jak w dowodzie twierdzenia o pełności to będzie on liniowo uporządkowany.

Aby udowodnić implikację z prawej do lewej należy zauważyć, że zamknięte w górę podzbiory liniowo uporządkowanego modelu Kripkego C też są liniowo uporządkowane i tworzą algebrę Heytinga H. Jeśli teraz określimy $\varrho(p) = \{c \mid c \Vdash p\}$ to przez łatwą indukcję uzyskamy równoważność warunków $H, \varrho \models \varphi$ oraz $C \Vdash \varphi$.

Zadanie 3: Formuła (3a) nie ma inhabitanta w postaci normalnej, więc nie może być tautologią. W otoczeniu $x : (p \to q) \to r,\ y : p \to r$ każdy term normalny typu r musiałby być postaci $xM^{p \to q}$ lub postaci yN^p. Takiego M ani N nie da się skonstruować, bo w naszym otoczeniu nie ma zmiennej typu kończącego się na p ani na q.

Niech teraz $\tau = ((p \to q) \to r) \to (p \to r) \to r$. Wtedy term

$$\lambda x^{\tau \to q}\, x(\lambda y^{(p\to q)\to r} \lambda z^{p \to r} y(\lambda u^p x(\lambda y^{(p\to q)\to r} \lambda z^{p\to r} zu))),$$

ma typ $(\tau \to q) \to q$, więc formuła (3b) jest tautologią.

Zadanie 4: Z „dobrego” prawa De Morgana $\forall x\, \neg Q(x) \leftrightarrow \neg \exists x\, Q(x)$ wynika równoważność formuł (4b) i (4c). Formuła (4b) implikuje formułę (4a), bo $P(x)$ implikuje $\neg\neg P(x)$, a schemat $(p \to q) \to \neg q \to \neg p$ jest intuicjonistycznie prawdziwy. Pozostaje zauważyć, że formuła (4a) nie implikuje pozostałych. Jeśli znaczeniami predykatu $P(x)$ są zbiory $\mathbb{R} - \{x\}$ dla $x \in \mathbb{R}$, to w algebrze otwartych podzbiorów prostej wartością formuły (4a) będzie 1, a wartością formuły (4c) będzie 0.