

1. Niech $GL(n, \mathbb{R})$ oznacza zbiór odwracalnych macierzy $n \times n$ o współczynnikach rzeczywistych z topologią podprzestrzeni $\mathbb{R}^{n^2}$.
 - a) Udowodnić, że $GL(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ jest podzbiorem otwartym.
 - b) Znaleźć domknięcie $GL(n, \mathbb{R})$ w $\mathbb{R}^{n^2}$.
 - c) Udowodnić, że $GL(n, \mathbb{R})$ ma dwie homeomorficzne składowe spójne, które są jednocześnie składowymi łukowej spójności.
2. Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową dana jest prosta $L = \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\}$. Niech $\mathbb{R}^2/L$ oznacza przestrzeń ilorazową powstałą przez zgniecenie L do punktu (dokładniej, dzielimy $\mathbb{R}^2$ przez relację równoważności $\sim$, taką że klasami równoważności są singletony punktów nie leżących na prostej L oraz prosta L).
 - (a) Udowodnić, że $\mathbb{R}^2/L$ nie spełnia I aksjomatu przeliczalności.
 - (b) Sprawdzić, czy odwzorowanie ilorazowe $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/L$ jest domknięte (otwarte).
 - (c) Sprawdzić, czy $\mathbb{R}^2/L$ ma własność Hausdorffa.
3. Udowodnić, że część wspólna przeliczalnej rodziny otwartych gęstych podzbiorów prostej z topologią strzałki jest zbiorem gęstym.
4. Zbadać, czy prosta z topologią strzałki i prosta z topologią euklidesową mają takie same zbiory gęste.
5. Niech $X \subset \mathbb{R}$ z topologią euklidesową, $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Opisać gęste podzbiory $X \times X$.
6. Niech X będzie zbiorem nieprzeliczalnym, $x_0 \in X$ wyróżnionym punktem. Niech

$$\mathcal{T} = \{U \subset X : x_0 \notin U \text{ lub } X \setminus U \text{ jest zbiorem skończonym}\}.$$

Zbadać, czy przestrzeń X :

- a) zawiera nieprzeliczalną podprzestrzeń dyskretną
 - b) jest ośrodkowa
 - c) spełnia pierwszy aksjomat przeliczalności
 - d) ma przeliczalną bazę
 - e) jest metryzowalna.
7. Pokazać, że w przestrzeni metrycznej każdy zbiór domknięty jest częścią wspólną przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych.
 Podać przykład przestrzeni topologicznej i takiego jej podzbioru domkniętego, dla którego ten warunek nie jest spełniony.
8. Niech $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} R_i$ gdzie $R_i = \mathbb{R}$ z topologią euklidesową.
 Niech $A = \{(x_i)_{i \in \mathbb{N}} : (x_i)_{i \in \mathbb{N}} \text{ jest zbieżny}\}$.

- a) Znaleźć $cl A$ oraz $int A$ w X
- b) Zbadać, czy funkcja $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$, $f((x_i)_{i \in \mathbb{N}}) = \lim(x_i)$ jest ciągła.
9. Podzbiór $A \subset X$ nazywa się retraktem X jeżeli istnieje funkcja ciągła $r: X \longrightarrow A$, taka że $r|_A = id_A$. Taka funkcja nazywa się retrakcją na zbiór A .
- 1) Pokazać, że podzbiór niepusty $A \subset X$ jest retraktem X wtedy i tylko wtedy gdy dla dowolnej przestrzeni Y i dowolnego ciągłego przekształcenia $f: A \longrightarrow Y$ istnieje ciągle przekształcenie $\tilde{f}: X \longrightarrow Y$, takie że $\tilde{f}|_A = f$.
- 2) Udowodnić, że jeżeli X jest przestrzenią Hausdorffa to każdy rerakt jest podzbiorem domkniętym.
- 3) Pokazać, że w $\mathbb{R}^n$ dowolna kula domknięta $D^n(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n: d(x, y) \leq \epsilon\}$ jest retraktem $\mathbb{R}^n$.
- 4) Pokazać, że w $\mathbb{R}^n$ sfera $S^{n-1}(x, \epsilon)$ jest retraktem kuli $D^n(x, \epsilon) - \{y\}$, gdzie y jest dowolnym punktem kuli domkniętej.