

Zadanie. Udowodnić, że przestrzeń pokazana na obrazku na trzeciej stronie jest spójna ale nie jest łukowo spójna. Oczywiście obrazek stanowi tylko przybliżenie. Dokładnie mówiąc, rozpatrywana przestrzeń to podprzestrzeń w $\mathbb{R}^2$, opisana tak:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\left\{ \frac{1}{i} \right\} \times [0, 1] \right) \right) \cup \left([0, 1] \times \{0\} \right) \cup \{(0, 1)\}$$

Uwaga. To zadanie jest dobrą ilustracją faktu, że często wygodniej się dowodzi spójności przestrzeni nie z podstawowej definicji (tej z parą podzbiorów otwartych), ale z równoważnego warunku, że przestrzeń jest spójna wtedy i tylko wtedy, gdy każde jej odwzorowanie na przestrzeń dyskretną dwupunktową jest stałe. To w części dotyczącej spójności.

Natomiast w części dotyczącej łukowej spójności, zalecenie jest takie, żeby sprytnie skorzystać z faktu, że każde odwzorowanie ciągłe z przestrzeni zwartej metrycznej w przestrzeń metryczną jest jednostajnie ciągłe. Ta zwarta przestrzeń o której tutaj jest mowa, to oczywiście odcinek domknięty $[0, 1]$.

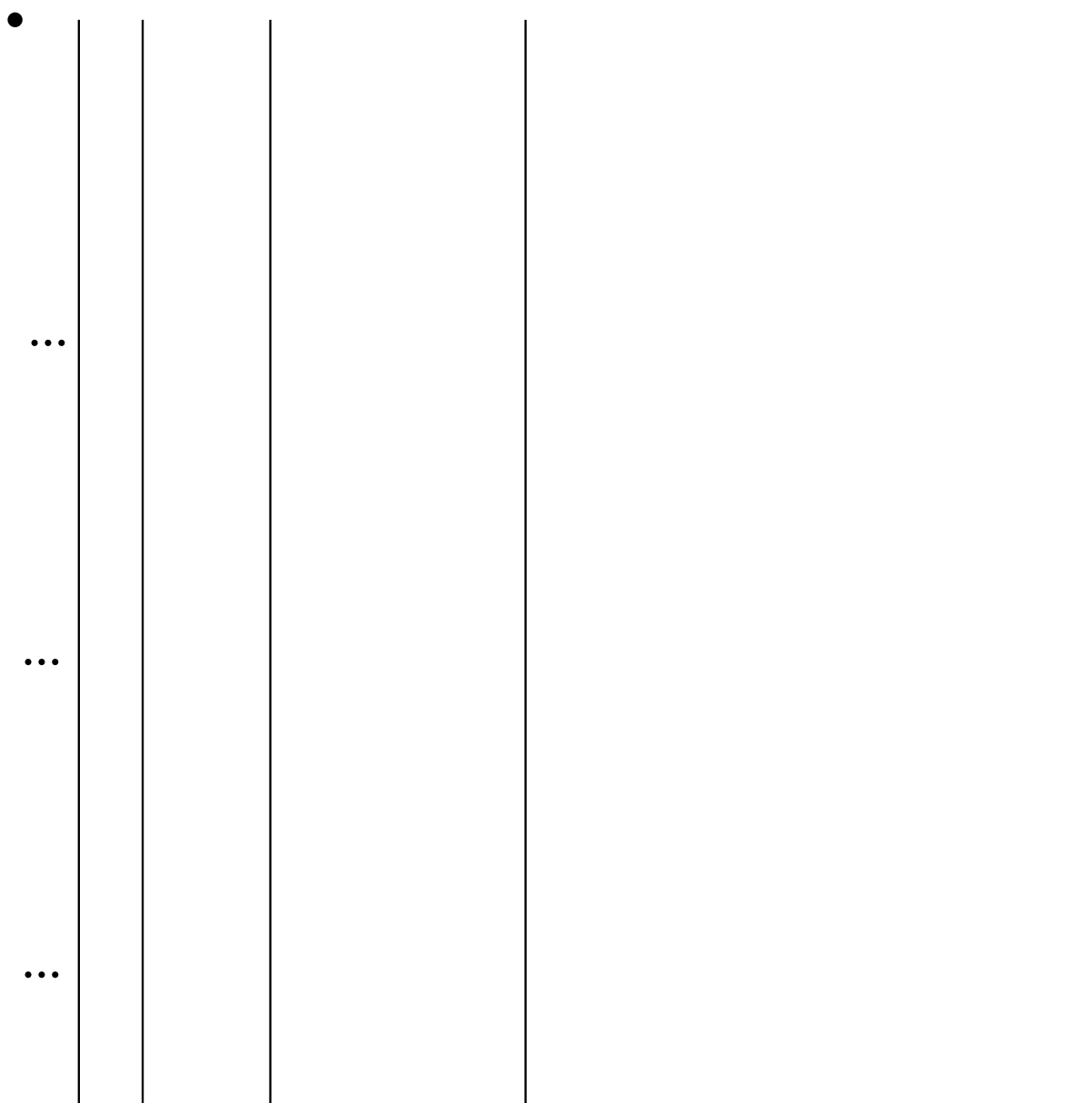


figure grzebien