Imię i nazwisko: _____

Do oceny przeznaczam uzasadnienia odpowiedzi na pytania: _____

Punktacja: odpowiedź prawidłowa: 2 punkty, błędna: -1 punkt, brak odpowiedzi: 0 punktów, maksymalna łączna punktacja: 38 punktów. Należy uzasadnić na piśmie odpowiedzi na cztery spośród pytań oznaczonych gwiazdkami (ocena: 0 – 10 punktów, maksymalna łączna punktacja: 38 punktów). Nie będą oceniane uzasadnienia odpowiedzi na pytania nie oznaczone gwiazdkami. Uzasadnienia odpowiedzi na dwa ostanie pytania, oznaczone dwiema gwiazdkami, mogą być podane osobno i są liczone oddzielnie (można za nie uzyskać dodatkowo po 10 punktów, choćby punktacja z uzasadnień przekroczyła 38).

☐ 1. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wówczas funkcja d_0 zadana wzorem $d_0(x, y) = min(d(x, y), 2009)$ jest metryką na zbiorze X, wyznaczającą tę samą topologię co topologia wyznaczona przez metrykę d.

☐ 2. Przestrzeń topologiczna X ma następującą własność: *istnieje punkt $x_0 \in X$, taki że $X - \{x_0\}$ ma dwie składowe spójności, których domknięcia w przestrzeni X są zwarte.* Wówczas każda przestrzeń homeomorficzna z przestrzenią X również ma opisaną własność.

☐ 3. Każda skończona przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna, to znaczy istnieje taka metryka na zbiorze X, że topologią wyznaczoną przez tę metrykę jest właśnie topologia $\mathcal{T}$.

☐ 4. Każda skończona przestrzeń topologiczna Hausdorffa $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna, to znaczy istnieje taka metryka na zbiorze X, że topologią wyznaczoną przez tę metrykę jest właśnie topologia $\mathcal{T}$.

☐ 5. Na zbiorze $X = \{1, 2, \ldots, 2009\}$ określamy topologię w taki sposób, że jedynymi zbiorami otwartymi są $\emptyset$ oraz wszystkie zbiory postaci $\{1, \ldots, k\}, k \leq 2009$. Wówczas, dla każdej funkcji ciągłej $f\colon X \longrightarrow X$, takiej że $f(X) = X$ istnieje punkt $x \in X$, taki że $f(x) = x$ (nie domagamy się tego, żeby taki punkt był dokładnie jeden).

☐ 6. Niech X będzie przestrzenią topologiczną. W przestrzeni $X \times X$ rozpatrujemy podprzestrzeń $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$. Wówczas przestrzeń Δ jest homeomorficzna z X.

☐ 7. Jeżeli (X, d) jest przestrzenią metryczną zwartą, a $A \subseteq X$ jest jej podprzestrzenią zupełną, to przestrzeń A jest zwarta.

☐ 8. W przestrzeni $(C[0, 1], d_{sup})$ istnieje nieskończony zbiór punktów (czyli funkcji), taki że każde dwa różne punkty z tego zbioru są odległe o 1.

☐ 9. * W przestrzeni $(C[0, 1], d_{sup})$ istnieje zbiór mocy continuum punktów (czyli funkcji), taki że każde dwa różne punkty z tego zbioru są odległe o 1.

☐ 10. * Niech W będzie podprzestrzenią w $(C[0, 1], d_{sup})$ złożoną ze wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych (i tylko z nich). Wówczas przestrzeń W jest metryzowalna w sposób zupełny.

☐ 11. Przestrzeń $(C[0, 1], d_{sup})$ jest ściągalna.

☐ 12. Przestrzeń $(C[0, 1], d_{sup})$ jest zwarta.

☐ 13. * Przestrzeń ilorazowa $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (chodzi o iloraz przez taką relację $\sim$, że $x \sim y \leftrightarrow (x = y$ lub $x, y \in \mathbb{Q})$ jest antydyskretna (to znaczy: jedynymi zbiorami otwartymi są zbiór pusty i cała przestrzeń).

☐ 14. * Przestrzeń ilorazowa $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (chodzi o iloraz przez taką relację $\sim$, że $x \sim y \leftrightarrow (x = y$ lub $x, y \in \mathbb{Q})$ jest przestrzenią Hausdorffa.

☐ 15. * Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech $f\colon X \longrightarrow X$ będzie odwzorowaniem zwężającym, to znaczy takim że istnieje $0 \leq \lambda < 1$, taka że

$$\forall_{x \neq y \in X}\ d(f(x), f(y)) < \lambda \cdot d(x, y).$$

Wówczas istnieje dokładnie jedna składowa C przestrzeni X, taka że $f(C) \subseteq C$.

☐ 16. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech $f\colon X \longrightarrow X$ będzie odwzorowaniem spełniającym warunek:

$$\forall_{x \neq y \in X}\ d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Wówczas istnieje taka składowa C przestrzeni X, że $f(C) \subseteq C$.

☐ 17. * Rozpatrzmy następujące dwie podprzestrzenie w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$: $X =$

$([0,\infty)\times\{0\})\cup(\mathbb{N}\times[0,1])$ (przyjmujemy, że $0\in\mathbb{N}$), $Y=(\mathbb{R}\times\{0\})\cup(\mathbb{Z}\times[0,1])$. Wówczas przestrzenie X i Y są homeomorficzne.

☐ 18. * W przestrzeni $(\mathbb{R}^2,d_r)$ (płaszczyzna z metryką rzeka) istnieje podprzestrzeń homeomorficzna z okręgiem euklidesowym S^1.

☐ 19. * Jeżeli przestrzenie topologiczne X i Y są homotopijnie równoważne, to istnieje odwzorowanie ciągłe $f\colon X\longrightarrow Y$, takie że $f(X)=Y$.

☐ 20. Niech X będzie sumą dwóch zewnętrznie stycznych okręgów o promieniu 1 na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Wówczas każde odwzorowanie ciągłe $f\colon X\longrightarrow X$ ma punkt stały, to znaczy taki, że $f(x)=x$.

☐ 21. Niech X będzie sumą dwóch zewnętrznie stycznych domkniętych kół o promieniu 1 na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Wówczas każde odwzorowanie ciągłe $f\colon X\longrightarrow X$ ma punkt stały, to znaczy taki, że $f(x)=x$.

☐ 22. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, taką że każde odwzorowanie ciągłe $f\colon X\longrightarrow X$ ma punkt stały. Niech $A\subseteq X$ i niech $r\colon X\longrightarrow A$ będzie retrakcją (to znaczy odwzorowaniem ciągłym, takim że dla wszystkich $a\in A$ zachodzi $r(a)=a$). Wówczas także każde odwzorowanie ciągłe $h\colon A\longrightarrow A$ ma punkt stały.

☐ 23. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Przypuśćmy, że dla każdej liczby dodatniej M istnieje metryka d_M na zbiorze X, taka że topologia wyznaczona przez d_M jest identyczna z topologią wyznaczoną przez d i ponadto w przestrzeni (X,d_M) odległość dowolnych dwóch punktów nie przekracza M. Wówczas przestrzeń X jest zwarta.

☐ 24. ** Na zbiorze $X=\{1,2,\ldots,2008\}$ określamy topologię w taki sposób, że jedynymi zbiorami otwartymi są $\emptyset$ oraz wszystkie zbiory postaci $\{1,\ldots,k\}, k\leq 2008$. Wówczas przestrzeń topologiczna X ma własność punktu stałego, to znaczy: dla każdej funkcji ciągłej $f\colon X\longrightarrow X$ istnieje punkt $x\in X$, taki że $f(x)=x$ (nie domagamy się tego, żeby taki punkt był dokładnie jeden).

☐ 25. ** W przestrzeni $(C[0,1],d_{sup})$ istnieje podprzestrzeń homeomorficzna ze sferą S^{2009}.