

Imię i nazwisko: _____

Do oceny przeznaczam uzasadnienia odpowiedzi na pytania: _____

Punktacja: odpowiedź prawidłowa: 2 punkty, błędna: -1 punkt, brak odpowiedzi: 0 punktów, maksymalna łączna punktacja: 38 punktów. Należy uzasadnić na piśmie odpowiedzi na cztery spośród pytań oznaczonych gwiazdkami (ocena: 0 – 10 punktów, maksymalna łączna punktacja: 38 punktów). Nie będą oceniane uzasadnienia odpowiedzi na pytania nie oznaczone gwiazdkami. Uzasadnienia odpowiedzi na dwa ostatnie pytania, oznaczone dwiema gwiazdkami, mogą być podane osobno i są liczone oddzielnie (można za nie uzyskać dodatkowo po 10 punktów, choćby punktacja z uzasadnień przekroczyła 38).

TAK 1. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną. Wówczas funkcja d_0 zadana wzorem $d_0(x, y) = \min(d(x, y), 2009)$ jest metryką na zbiorze X , wyznaczającą tę samą topologię co topologia wyznaczona przez metrykę d .

TAK 2. Przestrzeń topologiczna X ma następującą własność: *istnieje punkt $x_0 \in X$, taki że $X - \{x_0\}$ ma dwie składowe spójności, których domknięcia w przestrzeni X są zwarte*. Wówczas każda przestrzeń homeomorficzna z przestrzenią X również ma opisaną własność.

NIE 3. Każda skończona przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna, to znaczy istnieje taka metryka na zbiorze X , że topologią wyznaczoną przez tę metrykę jest właśnie topologia $\mathcal{T}$.

TAK 4. Każda skończona przestrzeń topologiczna Hausdorffa $(X, \mathcal{T})$ jest metryzowalna, to znaczy istnieje taka metryka na zbiorze X , że topologią wyznaczoną przez tę metrykę jest właśnie topologia $\mathcal{T}$.

TAK 5. Na zbiorze $X = \{1, 2, \dots, 2009\}$ określamy topologię w taki sposób, że jedynymi zbiorami otwartymi są $\emptyset$ oraz wszystkie zbiory postaci $\{1, \dots, k\}, k \leq 2009$. Wówczas, dla każdej funkcji ciągłej $f: X \rightarrow X$, takiej że $f(X) = X$ istnieje punkt $x \in X$, taki że $f(x) = x$ (nie domagamy się tego, żeby taki punkt był dokładnie jeden).

TAK 6. Niech X będzie przestrzenią topologiczną. W przestrzeni $X \times X$ rozpatrujemy podprzestrzeń $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$. Wówczas przestrzeń Δ jest homeomorficzna z X .

TAK 7. Jeżeli (X, d) jest przestrzenią metryczną zwartą, a $A \subseteq X$ jest jej podprzestrzenią zupełną, to przestrzeń A jest zwarta.

TAK 8. W przestrzeni $(C[0, 1], d_{sup})$ istnieje nieskończony zbiór punktów (czyli funkcji), taki że każde dwa różne punkty z tego zbioru są odległe o 1.

NIE 9. * W przestrzeni $(C[0, 1], d_{sup})$ istnieje zbiór mocy continuum punktów (czyli funkcji), taki że każde dwa różne punkty z tego zbioru są odległe o 1.

NIE 10. * Niech W będzie podprzestrzenią w $(C[0, 1], d_{sup})$ złożoną ze wszystkich wielomianów o współczynnikach wymiernych (i tylko z nich). Wówczas przestrzeń W jest metryzowalna w sposób zupełny.

TAK 11. Przestrzeń $(C[0, 1], d_{sup})$ jest ściągalna.

NIE 12. Przestrzeń $(C[0, 1], d_{sup})$ jest zwarta.

NIE 13. * Przestrzeń ilorazowa $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (chodzi o iloraz przez taką relację $\sim$, że $x \sim y \leftrightarrow (x = y$ lub $x, y \in \mathbb{Q})$) jest antydyskretna (to znaczy: jedynymi zbiorami otwartymi są zbiór pusty i cała przestrzeń).

NIE 14. * Przestrzeń ilorazowa $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (chodzi o iloraz przez taką relację $\sim$, że $x \sim y \leftrightarrow (x = y$ lub $x, y \in \mathbb{Q})$) jest przestrzenią Hausdorffa.

TAK 15. * Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech $f: X \rightarrow X$ będzie odwzorowaniem zwężającym, to znaczy takim że istnieje $0 \leq \lambda < 1$, taka że

$$\forall_{x \neq y \in X} d(f(x), f(y)) < \lambda \cdot d(x, y).$$

Wówczas istnieje dokładnie jedna składowa C przestrzeni X , taka że $f(C) \subseteq C$.

NIE 16. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Niech $f: X \rightarrow X$ będzie odwzorowaniem spełniającym warunek:

$$\forall_{x \neq y \in X} d(f(x), f(y)) < d(x, y).$$

Wówczas istnieje taka składowa C przestrzeni X , że $f(C) \subseteq C$.

NIE 17. * Rozpatrzmy następujące dwie podprzestrzenie w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$:

$X = ([0, \infty) \times \{0\}) \cup (\mathbb{N} \times [0, 1])$ (przyjmujemy, że $0 \in \mathbb{N}$), $Y = (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\mathbb{Z} \times [0, 1])$. Wówczas przestrzenie X i Y są homeomorficzne.

NIE 18. * W przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_r)$ (płaszczyzna z metryką rzeka) istnieje podprzestrzeń homeomorficzna z okregiem euklidesowym S^1 .

NIE 19. * Jeżeli przestrzenie topologiczne X i Y są homotopijnie równoważne, to istnieje odwzorowanie ciągłe $f: X \rightarrow Y$, takie że $f(X) = Y$.

NIE 20. Niech X będzie sumą dwóch zewnętrznie stycznych okręgów o promieniu 1 na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Wówczas każde odwzorowanie ciągłe $f: X \rightarrow X$ ma punkt stały, to znaczy taki, że $f(x) = x$.

TAK 21. Niech X będzie sumą dwóch zewnętrznie stycznych domkniętych kół o promieniu 1 na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$. Wówczas każde odwzorowanie ciągłe $f: X \rightarrow X$ ma punkt stały, to znaczy taki, że $f(x) = x$.

TAK 22. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, taką że każde odwzorowanie ciągłe $f: X \rightarrow X$ ma punkt stały. Niech $A \subseteq X$ i niech $r: X \rightarrow A$ będzie retrakcją (to znaczy odwzorowaniem ciągłym, takim że dla wszystkich $a \in A$ zachodzi $r(a) = a$). Wówczas także każde odwzorowanie ciągłe $h: A \rightarrow A$ ma punkt stały.

NIE 23. Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną. Przypuśćmy, że dla każdej liczby dodatniej M istnieje metryka d_M na zbiorze X , taka że topologia wyznaczona przez d_M jest identyczna z topologią wyznaczoną przez d i ponadto w przestrzeni (X, d_M) odległość dowolnych dwóch punktów nie przekracza M . Wówczas przestrzeń X jest zwarta.

TAK 24. ** Na zbiorze $X = \{1, 2, \dots, 2008\}$ określamy topologię w taki sposób, że jedynymi zbiorami otwartymi są $\emptyset$ oraz wszystkie zbiory postaci $\{1, \dots, k\}, k \leq 2008$. Wówczas przestrzeń topologiczna X ma własność punktu stałego, to znaczy: dla każdej funkcji ciągłej $f: X \rightarrow X$ istnieje punkt $x \in X$, taki że $f(x) = x$ (nie domagamy się tego, żeby taki punkt był dokładnie jeden).

TAK 25. ** W przestrzeni $(C[0, 1], d_{sup})$ istnieje podprzestrzeń homeomorficzna ze sferą S^{2009} .