

Imię i nazwisko: _____

Do oceny przeznaczam uzasadnienia odpowiedzi na pytania: _____

Punktacja: odpowiedź prawidłowa: 2 punkty, błędna: -1 punkt, brak odpowiedzi: 0 punktów, maksymalna łączna punktacja: 38 punktów. Należy uzasadnić na piśmie odpowiedzi na cztery spośród pytań oznaczonych gwiazdkami (ocena: 0 – 10 punktów, maksymalna łączna punktacja: 38 punktów). Nie będą oceniane uzasadnienia odpowiedzi na pytania nie oznaczone gwiazdkami. Uzasadnienia odpowiedzi na dwa ostatnie pytania, oznaczone dwiema gwiazdkami, mogą być podane osobno i są liczone oddzielnie (można za nie uzyskać dodatkowo po 10 punktów, choćby punktacja z uzasadnień przekroczyła 38).

TAK 1. Jeżeli produkt dwóch niepustych przestrzeni topologicznych jest przestrzenią spójną, to każda z tych przestrzeni jest spójna.

NIE 2. Niech X będzie sumą dwóch zewnętrznie stycznych sfer o promieniu 1, w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$. Wówczas każde odwzorowanie ciągłe $f: X \rightarrow X$ ma punkt stały, to znaczy taki, że $f(x) = x$.

TAK 3. Jeżeli X i Y są przestrzeniami topologicznymi, Y jest niespójna i istnieje ciągłe odwzorowanie $f: X \rightarrow Y$, takie że $f(X) = Y$, to przestrzeń X też jest niespójna.

NIE 4. Przestrzeń $(\mathbb{R}^2, d_k)$ (czyli płaszczyzna z metryką kolejową) jest ośrodkowa (to znaczy: posiada podzbiór gęsty mocy $\leq \aleph_0$).

NIE 5. W przestrzeni $(C[0, 1], d_{sup})$ istnieje podprzestrzeń homeomorficzna z płaszczyzną $(\mathbb{R}^2, d_k)$ (to znaczy płaszczyzną z metryką kolejową).

NIE 6. Istnieje ciągłe odwzorowanie przestrzeni S^{2009} (to znaczy sfery euklidesowej) na przestrzeń $(C[0, 1], d_{sup})$.

TAK 7. Niech D_n oznacza kulę domkniętą w przestrzeni euklidesowej wymiaru n . Niech $f: D_n \rightarrow C[0, 1]$ będzie odwzorowaniem ciągłym w przestrzeń funkcji ciągłych $C[0, 1]$. Wówczas $f(D_n)$ jest podzbiorem domkniętym i brzegowym w $C[0, 1]$.

TAK 8. W przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_r)$ (płaszczyzna z metryką rzeka) każdy niepusty podzbiór spójny

2
jest ściągalny.

TAK 9. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a C składową spójności w tej przestrzeni. Wówczas C jest zbiorem domkniętym w X .

TAK 10. Przestrzeń $(C[0, 1], d_{sup})$ posiada bazę mocy $\leq \aleph_0$.

NIE 11. Przestrzeń $(\mathbb{R}^2, d_r)$ (płaszczyzna z metryką rzeka) posiada bazę mocy $\leq \aleph_0$.

NIE 12. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ rozpatrujemy podprzestrzenie

$$A = ([-1, 1] \times [-1, 1]) \setminus \{(1, 1), (-1, -1)\}$$

i

$$B = ([-1, 1] \times [-1, 1]) \setminus \{(1, 1)\}.$$

Wówczas A i B są homeomorficzne.

TAK 13. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ rozpatrujemy podprzestrzenie

$$A = ([-1, 1] \times [-1, 1]) \setminus \{(1, 1), (-1, -1)\}$$

i

$$B = ([-1, 1] \times [-1, 1]) \setminus \{(1, 1)\}.$$

Wówczas A i B są homotopijnie równoważne.

NIE 14. Każda przestrzeń topologiczna X , taka że $2 \leq |X| < \aleph_0$, jest niespójna.

TAK 15. * Jeżeli istnieje ciągle odwzorowanie przestrzeni topologicznej X na przestrzeń dyskretną n -punktową, to przestrzeń X ma nie mniej niż n składowych.

TAK 16. W przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_e)$ istnieje podzbiór, który nie jest ani otwarty ani domknięty.

TAK 17. Jeżeli przestrzeń X ma dokładnie trzy składowe spójności, to składowe są zbiorami jednocześnie domkniętymi i otwartymi.

NIE 18. * W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ rozpatrujemy podprzestrzenie

$$X = ((0, \infty) \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [-1, 1] \right) \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \setminus \{(0, 0)\}$$

i

$$Y = X \cup (\{0\} \times [-2, 2]) \setminus \{(0, 0)\}.$$

Wówczas X i Y są homeomorficzne.

TAK 19. * Jeżeli n -elementowa przestrzeń topologiczna X ma n składowych spójności, to przestrzeń X jest dyskretna.

TAK 20. * W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ rozpatrujemy podzbiór

$$X = ((0, \infty) \times \{0\}) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \right\} \times [-1, 1] \right) \cup (\{0\} \times [-1, 1]) \setminus \{(0, 0)\}.$$

Zbiór X jest spójny.

NIE 21. Niech $X = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. Niech $A = X \setminus \{(1, 1, 1)\}$. Wówczas zbiór A jest retraktem przestrzeni X , to znaczy: istnieje odwzorowanie ciągłe $f: X \rightarrow A$, takie że $f|_A = id_A$.

TAK 22. Niech $X = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$. Niech $A = X \setminus \{(1, 1, 1)\}$. Na zbiorze A można określić relację równoważności $\sim$ w taki sposób, żeby przestrzeń $A/\sim$ była homeomorficzna z przestrzenią X .

NIE 23. Przestrzeń $(\mathbb{R}^2, d_k)$ (płaszczyzna z metryką kolejową) można przedstawić jako sumę wstępującego ciągu podzbiorów zwartych.

TAK 24. Niech X oznacza płaszczyznę z metryką kolejową, a Y płaszczyznę z metryką rzeka. W przestrzeni $X \times Y$ istnieje podzbiór homeomorficzny z S^1 (to znaczy z okręgiem euklidesowym).

NIE 25. * Przestrzeń $(\mathbb{R}^2, d_k)$ (płaszczyzna z metryką kolejową) ma własność punktu stałego, to znaczy: dla każdego odwzorowania ciągłego f tej przestrzeni w siebie istnieje punkt x_0 , taki że $f(x_0) = x_0$.

NIE 26. ** Jeżeli punkty a i b przestrzeni topologicznej X należą do różnych składowych spójności, to istnieje takie odwzorowanie ciągłe $f: X \rightarrow \{0, 1\}_{dyskr}$, że $f(a) \neq f(b)$.

NIE 27. ** Istnieje ciągłe odwzorowanie przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{2009}$ na przestrzeń $(C[0, 1], d_{sup})$.