Imię i nazwisko: _____

Do oceny przeznaczam uzasadnienia odpowiedzi na pytania: _____

Punktacja: odpowiedź prawidłowa: 2 punkty, błędna: -1 punkt, brak odpowiedzi: 0 punktów, maksymalna łączna punktacja: 38 punktów. Należy uzasadnić na piśmie odpowiedzi na cztery spośród pytań oznaczonych gwiazdkami (ocena: 0 – 10 punktów, maksymalna łączna punktacja: 38 punktów). Nie będą oceniane uzasadnienia odpowiedzi na pytania nie oznaczone gwiazdkami. Uzasadnienia odpowiedzi na dwa ostanie pytania, oznaczone dwiema gwiazdkami, mogą być podane osobno i są liczone oddzielnie (można za nie uzyskać dodatkowo po 10 punktów, choćby punktacja z uzasadnień przekroczyła 38).

☐ 1. Jeżeli produkt dwóch niepustych przestrzeni topologicznych jest przestrzenią spójną, to każda z tych przestrzeni jest spójna.

☐ 2. Niech X będzie sumą dwóch zewnętrznie stycznych sfer o promieniu 1, w przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^3$. Wówczas każde odwzorowanie ciągłe $f\colon X \longrightarrow X$ ma punkt stały, to znaczy taki, że $f(x) = x$.

☐ 3. Jeżeli X i Y są przestrzeniami topologicznymi, Y jest niespójna i istnieje ciągłe odwzorowanie $f\colon X \longrightarrow Y$, takie że $f(X) = Y$, to przestrzeń X też jest niespójna.

☐ 4. Przestrzeń $(\mathbb{R}^2, d_k)$ (czyli płaszczyzna z metryką kolejową) jest ośrodkowa (to znaczy: posiada podzbiór gęsty mocy $\leq \aleph_0$).

☐ 5. W przestrzeni $(C[0,1], d_{sup})$ istnieje podprzestrzeń homeomorficzna z płaszczyzną $(\mathbb{R}^2, d_k)$ (to znaczy płaszczyzną z metryką kolejową).

☐ 6. Istnieje ciągłe odwzorowanie przestrzeni S^{2009} (to znaczy sfery euklidesowej) na przestrzeń $(C[0,1], d_{sup})$.

☐ 7. Niech D_n oznacza kulę domkniętą w przestrzeni euklidesowej wymiaru n. Niech $f\colon D_n \longrightarrow C[0,1]$ będzie odwzorowaniem ciągłym w przestrzeń funkcji ciągłych $C[0,1]$. Wówczas $f(D_n)$ jest podzbiorem domkniętym i brzegowym w $C[0,1]$.

☐ 8. W przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_r)$ (płaszczyzna z metryką rzeka) każdy niepusty podzbiór spójny

jest ściągalny.

☐ 9. Niech X będzie przestrzenią topologiczną, a C składową spójności w tej przestrzeni. Wówczas C jest zbiorem domkniętym w X.

☐ 10. Przestrzeń $(C[0,1], d_{sup})$ posiada bazę mocy $\leq \aleph_0$.

☐ 11. Przestrzeń $(\mathbb{R}^2, d_r)$ (płaszczyzna z metryką rzeka) posiada bazę mocy $\leq \aleph_0$.

☐ 12. W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ rozpatrujemy podprzestrzenie

$$A = ([-1,1] \times [-1,1]) \setminus \{(1,1),(-1,-1)\}$$

i

$$B = ([-1,1] \times [-1,1]) \setminus \{(1,1)\}.$$

Wówczas A i B są homeomorficzne.

☐ 13. W przestrzeni eukldesowej $\mathbb{R}^2$ rozpatrujemy podprzestrzenie

$$A = ([-1,1] \times [-1,1]) \setminus \{(1,1),(-1,-1)\}$$

i

$$B = ([-1,1] \times [-1,1]) \setminus \{(1,1)\}.$$

Wówczas A i B są homotopijnie równoważne.

☐ 14. Każda przestrzeń topologiczna X, taka że $2 \leq |X| < \aleph_0$, jest niespójna.

☐ 15. * Jeżeli istnieje ciągłe odwzorowanie przestrzeni topologicznej X na przestrzeń dyskretną n-punktową, to przestrzeń X ma nie mniej niż n składowych.

☐ 16. W przestrzeni $(\mathbb{R}^2, d_e)$ istnieje podzbiór, który nie jest ani otwarty ani domknięty.

☐ 17. Jeżeli przestrzeń X ma dokładnie trzy składowe spójności, to składowe są zbiorami jednocześnie domkniętymi i otwartymi.

☐ 18. * W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ rozpatrujemy podprzestrzenie

$$X = \big((0,\infty) \times \{0\}\big) \cup \big(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{n}\} \times [-1,1]\big) \cup \big(\{0\} \times [-1,1]\big) \setminus \{(0,0)\}$$

i

$$Y = X \cup \big(\{0\} \times [-2,2]\big) \setminus \{(0,0)\}.$$

Wówczas X i Y są homeomorficzne.

☐ 19. * Jeżeli n-elementowa przestrzeń topologiczna X ma n składowych spójności, to przestrzeń X jest dyskretna.

☐ 20. * W przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^2$ rozpatrujemy podzbiór

$$X = \big((0,\infty)\times\{0\}\big) \cup \big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\}\times[-1,1]\big) \cup \big(\{0\}\times[-1,1]\big) \setminus \{(0,0)\}.$$

Zbiór X jest spójny.

☐ 21. Niech $X = [-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$. Niech $A = X \setminus \{(1,1,1)\}$. Wówczas zbiór A jest retraktem przestrzeni X, to znaczy: istnieje odwzorownie ciągłe $f\colon X \to A$, takie że $f|_A = id_A$.

☐ 22. Niech $X = [-1,1]\times[-1,1]\times[-1,1]$. Niech $A = X \setminus \{(1,1,1)\}$. Na zbiorze A można określić relację równoważności $\sim$ w taki sposób, żeby przestrzeń $A/_\sim$ była homeomorficzna z przestrzenią X.

☐ 23. Przestrzeń $(\mathbb{R}^2, d_k)$ (płaszczyzna z metryką kolejową) można przedstawić jako sumę wstępującego ciągu podzbiorów zwartych.

☐ 24. Niech X oznacza płaszczynę z metryką kolejową, a Y płaszczyznę z metryką rzeka. W przestrzeni $X \times Y$ istnieje podzbiór homeomorficzny z S^1 (to znaczy z okręgiem euklidesowym).

☐ 25. * Przestrzeń $(\mathbb{R}^2, d_k)$ (płaszczyzna z metryką kolejową) ma własność punktu stałego, to znaczy: dla każdego odwzorowania ciągłego f tej przestrzeni w siebie istnieje punkt x_0, taki że $f(x_0) = x_0$.

☐ 26. ** Jeżeli punkty a i b przestrzeni topologicznej X należa do różnych składowych spójności, to istnieje takie odwzorowanie ciągłe $f\colon X \longrightarrow \{0,1\}_{dyskr}$, że $f(a) \neq f(b)$.

☐ 27. ** Istnieje ciągłe odwzorowanie przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}^{2009}$ na przestrzeń $(C[0,1], d_{sup})$.