Zadanie 1.21. Udowodnić, że $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$
Dowód. Chcemy udowodnić zawierania w obydwie strony. Mniej trywialna część dowodu ($\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$) polega na dwukrotnym zastosowaniu ogólnej zasady:

0. $X \subseteq Y \Rightarrow \overline{X} \subseteq \overline{Y}$ (domknięcie jest zgodne z zawieraniem).

Mianowicie:

1. $$A \subseteq A \cup B, \text{zatem } \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$$

2. $$B \subseteq A \cup B, \text{zatem } \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$$

Z 1. 2. wynika natychmiast, że $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, mamy więc zawieranie w jedną stronę.

Ale zawieranie w drugą stronę ($\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$) jest jeszcze bardziej oczywiste:

3. $$A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$$

Domykając obydwie strony zawierania otrzymujemy

4. $$\overline{A \cup B} \subseteq \overline{\overline{A} \cup \overline{B}} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

We wzorze 4. zawieranie jest domknięciem zawierania ze wzoru 3., a równość wynika z faktu, że domknięcie zbioru domkniętego jest tym samym zbiorem.
Mamy zatem zawierania w obydwie strony, a więc rozpatrywane zbiory są równe.