**Zadanie 1.22.** Niech $Y \subseteq X$ będzie podzbiorem przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$. Dla $A \subseteq Y$ domknięcie $A$ w podprzestrzeni $(Y, \mathcal{T}_Y)$ (w przestrzeni $(X, \mathcal{T})$) oznaczamy przez $\overline{A}^Y$ ($\overline{A}^X$).

**(A)** Wykazać, że $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$.

Dowód. Rozwiązanie polega na uważnym wypisaniu warunków przynależności punktu do zbioru po lewej stronie i do zbioru po prawej stronie i stwierdzeniu, że te warunki są identyczne. Warunek przynależności punktu $z$ do zbioru $\overline{A}^Y$ jest następujący:

$$z \in \overline{A}^Y \Leftrightarrow (z \in Y \wedge \forall_{U \in \mathcal{T}_Y} \ (z \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset)). \tag{1.22.1.}$$

Zróbmy dwa małe komentarze do (1.22.1):

1. Gdybyśmy rozważali tylko jedną przestrzeń topologiczną, to wypisując warunek przynależności punktu do domknięcia zbioru zapewne pominęlibyśmy warunek, że ten punkt należy do rozpatrywanej przestrzeni, uznając, że rozpatrywana przestrzeń stanowi uniwersum naszych rozważań. W tym wypadku podkreślamy, po prawej stronie równoważności, że $z \in Y$, bo w przeciwnym razie nie byłoby jasne, że to właśnie mamy na myśli.
2. Na ogół piszemy $U = int\, U$, gdy chcemy napisać, że zbiór $U$ jest otwarty. Tutaj użyliśmy zapisu $U \in \mathcal{T}_Y$, żeby uniknąć wprowadzania dodatkowych oznaczeń $int_X$ i $int_Y$.

To, co napisaliśmy we wzorze (1.22.1) nie odwoływało się na razie do definicji topologii podprzestrzeni: zbiory otwarte w $Y$ to takie, które dają się zapisać jako przecięcie zbioru $Y$ i jakiegoś zbioru otwartego w $X$. Uwzględniając tę zasadę możemy przepisać (1.22.1) w natępującej postaci:

$$z \in \overline{A}^Y \Leftrightarrow (z \in Y \wedge \forall_{U \in \mathcal{T}_X} \ (z \in U \cap Y \Rightarrow U \cap Y \cap A \neq \emptyset)). \tag{1.22.2.}$$

Uwzględniając fakty, że o punkcie $z$ założyliśmy w pierwszym członie koniunkcji iż $z \in Y$ oraz że $A \subseteq Y$, możemy przepisać powyższy warunek w prostszej postaci:

$$z \in \overline{A}^Y \Leftrightarrow (z \in Y \wedge \forall_{U \in \mathcal{T}_X} \ (z \in U \Rightarrow U \cap A \neq \emptyset)). \tag{1.22.3.}$$

(napisaliśmy $z \in U$, zamiast $z \in U \cap Y$, bo w sytuacji, gdy wiadomo, że $z \in Y$ są to warunki równoważne. Podobnie, skoro $A \subseteq Y$, to $U \cap Y \cap A = U \cap A$.)

W tym momencie dowód jest właściwie zakończony: prawa strona równoważności (1.22.3) przybrała postać warunku na przynależność punktu $z$ do zbioru $Y \cap \overline{A}^X$ (w sformułowaniu zadania była mowa o $\overline{A}^X \cap Y$, ale to już jest oczywiście wszystko jedno).

**(B)** Wykazać, że jeżeli $\overline{A}^Y = Y$, to $\overline{A}^X = \overline{Y}^X$.

Dowód. Z punktu (A) (dla przypomnienia: $\overline{A}^Y = \overline{A}^X \cap Y$) wynika, że skoro $\overline{A}^Y = Y$, to

$$Y \subseteq \overline{A}^X.$$

Ze zgodności operacji domknięcia z zawieraniem otrzymujemy

$$\overline{Y}^X \subseteq \overline{A}^X \tag{1.22.4}$$

(po prawej stronie nie dopisałem jeszcze jednej kreski, bo wiadomo, że domknięcie zbioru domkniętego to jest ten sam zbiór, to znaczy skorzystałem z faktu, że $\overline{A}^X = \overline{\overline{A}^X}^X$).
Mamy też zawieranie w drugą stronę, to znaczy $A \subseteq Y$, zatem

1.22.5 $$\overline{A}^X \subseteq \overline{Y}^X.$$

Zestawiając (1.22.4) i (1.22.5) otrzymujemy $\overline{A}^X = \overline{Y}^X$.