Grzebień z wyłamanym zębem

Niech

$$X = (\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{n}\} \times [0,1]) \cup ([0,1] \times \{0\}) \cup \{(0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

X jest więc grzebieniem z pionowymi zębami, wyrastającymi z osi X do góry, do wysokości 1, z punktów postaci $\frac{1}{n}$, wraz z rączką w postaci odcinka $[0,1]$ na osi X z dołączonym pojedynczym punktem $(0,1)$, końcem wyłamanego zęba (patrz górny rysunek na drugiej stronie.). Udowodnić, że przestrzeń X nie jest łukowo spójna.

Dowód.

1. Wersja bez jednostajnej ciągłości. Rozpatrzmy funkcję ciągłą $f : [0,1] \to X$, taką że $f(0) = (0,1)$. Chcemy pokazać, że $f(1)$ nie może być równe $(1,1)$, czyli że punktów $(0,1)$ i $(1,1)$ nie można połączyć drogą (ciągłym obrazem odcinka) w X. Niech A będzie składową spójności punktu 0 w $f^{-1}(\{(0,1)\})$. Jest jasne, że $A = [0,t]$ dla odpowiedniego t, lub $A = \{0\}$ bo jako spójny niepusty podzbiór przedziału $[0,1]$, A jest przedziałem lub zbiorem jednopunktowym. Nie ma możliwości żeby $A = [0,t)$, bo funkcja ciągła stała w obcięciu do $[0,t)$ musi być stała na całym $[0,t]$ (w tym konkretnym przypadku — gdyby na przeciwdziedzinie rozpatrywać topologię antydyskretną, to nie można by tak twierdzić). Pokażemy, nie ma możliwości aby $A = [0,t], t < 1$. Rozpatrzmy $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Zgodnie z definicją ciągłości funkcji f w punkcie t istnieje $\delta > 0$, taka że $f(t-\delta, t+\delta) \subseteq B_X((0,1), \frac{1}{10})$. W symbolu B_X litera X podkreśla, że chodzi o kulę w X, a nie w $\mathbb{R}^2$, patrz drugi rysunek na drugiej stronie. Ale w takiej kuli składową spójności punktu $(0,1)$ jest $\{(0,1)\}$. Zatem $f(t-\delta, t+\delta) = \{(0,1)\}$. W takim razie $t = 1$, bo w przeciwnym wypadku dłuższy od $[0,t]$ spójny przedział $[0, t+\delta]$ byłby cały zawarty w $f^{-1}(\{(0,1)\})$ (wbrew założeniu, że $[0,t]$ jest składową spójności w $f^{-1}(\{(0,1)\})$). Ewentualność $A = \{(0,1)\}$ wykluczamy analogicznie. Okazało się, że $f^{-1}(\{(0,1)\}) = [0,1]$, co kończy dowód.

Dowód.

2. Wersja z jednostajną ciągłością (bardziej skomplikowana, ale chyba bardziej perspektywiczna). Rozpatrzmy funkcję ciągłą $f : [0,1] \to X$, taką że $f(0) = (0,1)$. Chcemy pokazać, że $f(1)$ nie może być równe $(1,1)$, czyli że punktów $(0,1)$ i $(1,1)$ nie można połączyć drogą (ciągłym obrazem odcinka) w X. Przyjmijmy $\varepsilon = \frac{1}{10}$. Funkcja f jest jednostajnie ciagła, bo jest funkcją ciągłą określoną na odcinku domkniętym. W takim razie istnieje $\delta > 0$, taka że dla dowolnych $x_1, x_2 \in [0,1]$, jeżeli $d(x_1, x_2) \leq \delta$, to $d(f(x_1), f(x_2)) < \frac{1}{10}$ (zwykle pisze się ostre nierówności, ale tutaj pierwszą nierówność wygodnie jest napisać w postaci nieostrej). W szczególności punkty z przedziału $[0,\delta]$ muszą mieć obrazy w kuli $B_X((0,1), \frac{1}{10})$. W symbolu B_X litera X podkreśla, że chodzi o kulę w X, a nie w $\mathbb{R}^2$, patrz drugi rysunek na drugiej stronie. Ale w takiej kuli składową spójności punktu $(0,1)$ jest $\{(0,1)\}$, a $f([0,\delta])$ jest zbiorem spójnym, a zatem $f([0,\delta]) = \{(0,1)\}$. Analogicznie pokazujemy, że $f([\delta, 2\delta]) = \{(0,1)\}$ i tak dalej. Zatem ostatecznie $f([0,1]) = \{(0,1)\}$, w szczególności $f(1) \neq (1,1)$.