Spis ważnych definicji i faktów z topologii I.

Uwaga: niektóre definicje są tak ważne, że pominąłem je w tym spisie, uważając że z pewnością wszyscy już dawno znają je na pamięć. Na klasówkach i na egzaminie można się bezpośrednio powoływać na fakty wymienione w tym spisie. Proszę uprzejmie o uwagi, pewnie są tu jakieś głupstwa. Przed chwilą przez pomyłkę w punkcie (5.5) napisałem *otwartym* zamiast *domkniętym*. Tym razem zauważyłem, ale może jest więcej takich błędów.

1. **Zbiór gęsty.** W przestrzeni topologicznej X podzbiór $A \subseteq X$ jest gęsty wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{A} = X$.
   Uwaga: warunek konieczny i dostateczny na to jest taki, że każdy niepusty podzbiór otwarty $U \subseteq X$ musi zawierać chociaż jeden punkt ze zbioru A. Uwaga: inna postać tego warunku koniecznego i dostatecznego: jeżeli $\mathcal{B}$ jest bazą topologii przestrzeni X, to każdy niepusty podzbiór otwarty $U \in \mathcal{B}$ musi zawierać chociaż jeden punkt ze zbioru A.
2. **Przestrzeń ośrodkowa.** Przestrzeń ośrodkowa to jest taka przestrzeń topologiczna, w której istnieje podzbiór gęsty mocy $\leq \aleph_0$.
   Uwaga: jeżeli przestrzeń topologiczna ma bazę mocy $\leq \aleph_0$, to automatycznie jest także ośrodkowa.
3. **Punkt izolowany.** Punkt x w przestrzeni topologicznej X jest izolowany $\Leftrightarrow int\{x\} = \{x\}$.
4. **Punkt skupienia.** Punkt $x \in A$ w przestrzeni topologicznej X nazywamy punktem skupienia zbioru $A \Leftrightarrow x \in \overline{A - \{x\}}$.
   Dla przestrzeni metrycznych jest to równoznaczne stwierdzeniu, że $dist(x, A - \{x\}) = 0$. Ogólnie, jest to równoważne stwierdzeniu, że każde otwarte otoczenie punktu x ma niepuste przecięcie ze zbiorem $A - \{x\}$.
5. **Własność Hausdorffa.** Przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ ma własność Hausdorffa wtedy i tylko wtedy gdy

   $$\forall_{a \neq b \in X} \exists_{U,V \in \mathcal{T}}\ a \in U \wedge b \in V \wedge U \cap V = \emptyset.$$

   Może ktoś woli ten sam warunek sformułowany w innym stylu:
   Dla dowolnych dwóch różnych punktów a i b przestrzeni X istnieją zbiory otwarte $a \in U$ i $b \in V$, takie ze $U \cap V = \emptyset$.
   Nieco mniej formalnie można powiedzieć, że zakładamy, że dwa różne punkty dają się oddzileć zbiorami otwartymi.
   Własność Hausdorffa jest mocniejsza, niż można na pierwszy rzut oka pomyśleć. Oto spis niektórych ważnych faktów związanych z tą własnością.

5.1 Każda przestrzeń metryczna jest Hausdorffa (tzn. ma własność Hausdorffa). To daje od razu metodę pokazywania prostych przykładów przestrzeni topologicznych niemetryzowalnych, to znaczy takich, że topologia nie pochodzi od żadnej metryki. Najprostszy taki przykład, to przestrzeń antydyskretna mocy co najmniej 2.

5.2 Jeżeli $f, g : X \to Y$ są odwzorowaniami ciągłymi przestrzeni topologicznych, a przestrzeń Y jest Hausdorffa i ponadto $f|_A = g|_A$, gdzie A jest podzbiorem gęstym w X, to $f = g$.

5.3 Skończona przestrzeń Hausdorffa jest dyskretna.

5.4 W przestrzeni Hausdorffa podzbiory jednopunktowe są domknięte.

5.5 Przestrzeń X ma własność Hausdorffa $\Leftrightarrow$ przekątna w produkcie $X \times X$ jest podzbiorem domkniętym (przekątna, to znaczy $\Delta = \{(x, x)|x \in X\}$).

5.6 Niech $f : X \to Y$. Jeżeli Y jest przestrzenią Hausdorffa, to f jest funkcją ciągłą $\Leftrightarrow$ wykres funkcji f jest domkniętym podzbiorem przestrzeni $X \times Y$.

6. **Własność topologiczna** jest to taka własność przestrzeni topologicznych, którą dwie przestrzenie homeomorficzne muszą albo obie mieć, albo obie nie mieć. Na przykład: jeżeli przestrzeń topologiczna ma dokładnie jeden punkt izolowany, to każda przestrzeń topologiczna z nią homeomorficzna też ma dokładnie jeden punkt izolowany.

   Ogólna zasada jest następująca: własności, które daje się opisać w terminach topologiczno – mnogościowych są własnościami topologicznymi. Własności, w których opisie odowlujemy się do metryki czasem są własnościami topologicznymi, ale generalnie nie muszą.

   Przykład. Topologia euklidesowa na $\mathbb{R}^2$ ma następującą własność: *każda kula jest spójna*, ale ta własność odwołuje się do pojęcia metrycznego — kuli. To jeszcze nie znaczy, że ta własność nie jest topologiczna, ale faktycznie nie jest: można na prostej zadać metrykę w taki sposób, że wyznaczona przez nią topologia będzie tą samą topologią euklidesową, ale niektóre kule będą niespójne.

Poniższy spis zawiera listę faktów i definicji, dotyczących przestrzeni zwartych. Te fakty oceniam subiektywnie jako na tyle ważne, że należy je po prostu pamiętać.

1. Definicja przestrzeni topologicznej zwartej. Przestrzeń topologiczna X jest zwarta wtedy i tylko wtedy gdy spełnia jednocześnie następujące warunki:
   1. jest Hausdorffa
   2. z każdego pokrycia zbiorami otwartymi można wybrać podpokrycie skończone (pokrycie to jest taka rodzina zbiorów, że ich suma jest równa całemu X).
2. Powyższa definicja może być sformułowana również w terminach zbiorów domkniętych: warunek 2. z definicji można zapisać w następującej postaci.
   Jeżeli przecięcie pewnej niepustej rodziny zbiorów domkniętych jest puste, to przecięcie jakiejś jej skończonej niepustej podrodziny też jest puste.
   Istnieje pewien tradycyjny sposób formułowania tego samego warunku:
   Scentrowana niepusta rodzina podzbiorów domkniętych ma niepuste przecięcie (scentrowana rodzina, to taka, że każda skończona niepusta podrodzina ma niepuste przecięcie).
3. Dla przestrzeni metrycznych (które oczywiście są zawsze Hausdorffa) następujące warunki (każdy z nich) są równoważne zwartości:
   1. Każdy ciąg wstępujący podzbiorów otwartych właściwych przestrzeni X ma sumę, która dalej jest podzbiorem właściwym w X.
   2. Każdy ciąg zstępujący podzbiorów domkniętych niepustych w przestrzeni X ma przecięcie, które dalej jest podzbiorem niepustym w przestrzeni X.
   3. Z każdego ciągu można wybrać podciąg zbieżny.

Powyżej została podana definicja przestrzeni zwartych i pewne warunki równoważne, niektóre z nich tylko dla przestrzeni metrycznych. Teraz nastąpi spis podstawowych własności przestrzeni zwartych.

4. Przestrzeń metryczna zwarta jest ograniczona.
5. Przestrzeń metryczna zwarta nie może zawierać nieskończonego podzbioru w którym każde dwa różne punkty są odległe o więcej niż $\delta > 0$ (ta δ jest jednakowa dla wszystkich par).
6. Jeżeli X jest przestrzenią zwartą, to topologia podprzestrzeni na podzbiorze $A \subseteq X$ jest zwarta wtedy i tylko wtedy, gdy A jest podzbiorem domkniętym w X.
7. Obraz ciągły przestrzeni zwartej w przestrzeni Hausdorffa Y jest podzbiorem domkniętym.
8. Przekształcenie ciągłe z przestrzeni zwartej w przestrzeń Hausdorffa jest domknięte (to znaczy obrazy podzbiorów domkniętych są domknięte).
8. Obraz ciągły przestrzeni zwartej w przestrzeni Hausdorffa Y jest podzbiorem zwartym.
9. Funkcja ciągła o wartościach rzeczywistych określona na przestrzeni zwartej przyjmuje wartość największą i najmniejszą.
10. Dla każdego pokrycia przestrzeni zwartej metrycznej X zbiorami otwartymi miepustymi $\{U_t\}_{t\in T}$ istnieje liczba Lebesgue'a tego pokrycia λ, to znaczy taka liczba rzeczywista $\lambda > 0$, że dla każdego $x \in X$ istnieje $t \in T$, takie że $B(x, \lambda) \subseteq U_t$.