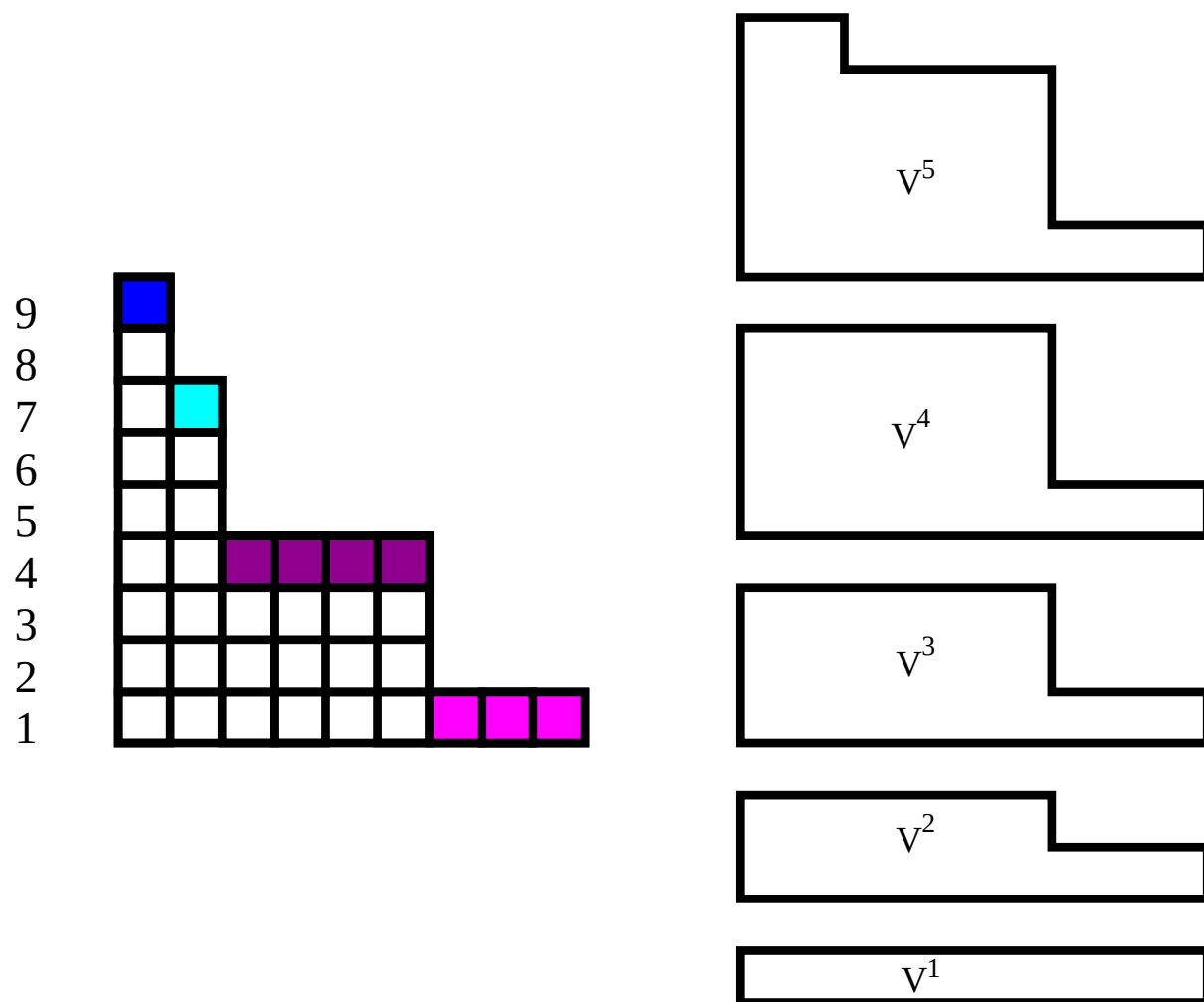




rysunek 1

Na rysunku 1 pokazany jest schemat pierwszego, wstępnego, etapu obliczania postaci Jordana i bazy Jordana pewnej macierzy A rozmiaru 35×35 . Opis dotyczy sytuacji, gdy ciało współczynników jest algebraicznie domknięte. Rozpatrujemy uproszczoną dodatkowo sytuację, gdy wartości własne macierzy A są wszystkie równe 0. Oczywiście realnie rzecz biorąc przykład tak duży jest nie do policzenia ręcznie. Co widać na rysunku? Widać dużą tabelkę, składającą się z kolejnych wierszy, coraz krótszych (nieostro), wyrównanych do lewej strony. W kratkach nic nie jest wpisane, żeby nie komplikować rysunku. Ale tak naprawdę, to w kratkach powinny być wpisane elementy bazy kolejnych przestrzeni

$$V^i = \ker f^i.$$

Te bazy budujemy stopniowo, od dołu. Tak więc w pierwszym wierszu wpisujemy bazę przestrzeni V^1 , czyli po prostu bazę jądra przekształcenia f_A . W drugim wierszu dopisujemy pewną niezbędną liczbę wektorów, żeby te dotychczasowe wektory (z gotowego już wiersza pierwszego) razem z tymi nowymi dały bazę przestrzeni V^2 . I tak dalej. To są w zasadzie rutynowe czynności, chociaż mogą być bardzo uciążliwe. Trzeba tylko umieć mnożyć macierze i umieć rozwiązywać układy równań liniowych. W opisanej sytuacji czynności te prowadzą nieuchronnie do sytuacji, w której postępowanie się urywa. ponieważ za którymś razem V^n okazuje się równe całej przestrzeni V . Na naszym rysunku mamy 35 kratek diagramu. Gdybyśmy przeprowadzili konkretne obliczenia, to w tych kratkach byłyby wpisane wektory — w pierwszej linijce wektory bazy przestrzeni V^1 , w pierwszej i drugiej łącznie wektory bazy przestrzeni V^2 itd.

Tabelka ta, pozwala od razu ustalić ile jest klatek Jordana różnych rozmiarów w szukanej postaci Jordana. Klatek wymiaru $i \times i$ jest mianowicie tyle, ile kolumn wysokości i w tabelce. W tym przypadku:

1. Jedna klatka 9×9 ,
2. Jedna klatka 7×7 ,
3. Cztery klatki 4×4 ,
3. Trzy klatki 1×1 .

Niestety skonstruowana baza nie jest jeszcze tą, o którą chodzi — chociaż wiemy już ile jest klatek poszczególnych rozmiarów. Trzeba wykonać jeszcze następującą pracę. Patrzymy na lewą górną kratkę tabeli. Poniżej wypisujemy obrazy wektora z tej kratki (v), to znaczy $f(v)$, $f^2(V)$ itd. Ostatni niezerowy wektor jaki otrzymamy (a otrzymamy ich akurat tyle co wysokość kolumny) jest wektorem własnym. Te wektory, czytane w kolejności od dołu do góry są wektorami bazy Jordana, odpowiedzialnymi za pierwszą klatkę Jordana.

PULAPKA. Niestety w tym miejscu pojawia się pewnien drobny kłopot: musimy zmodyfikować zawartość tabeli na prawo od pierwszej kolumny. Chcemy teraz zastosować to samo postępowanie do najwyżej położonego elementu z drugiej kolumny, ale najpierw będzie trzeba poprawić uzyskaną tabelę, żeby wektory umieszczone w początkowych i wierszach znowu stanowiły bazę przestrzeni V^i — to się mogło popsuć. Poprawka polega na ewentualnym zastąpieniu w każdym wierszu poniżej: jednego z wektorów, wektorem z poprzedniej pierwszej kolumny (tak aby wektory w wierszu zrobiły się liniowo niezależne). Kiedy to zrobimy, możemy już zapomnieć o pierwszej kolumnie i traktować to co jest na prawo od niej tak, jakby to była cała nowa tabelka.

Po prawej stronie rysunku 1 pokazane są obszary tabeli zawierające bazy kolejnych przestrzeni V^n — to jest zrobione po to, żeby nikt nie pomyślał, że baza przestrzeni V^i jest złożona z samych tylko wektorów z i -tej linijki, nie w skład tej bazy wchodzi wektory ze wszystkich linijek, od najniższej do i -tej od dołu.