

Zadanie 1.2.b

P.Traczyk@mimuw.edu.pl

19 marca 2020

Proszę Państwa, wysyłam Państwu komentarz do zadania 2.b z pierwszej serii zadań zdalnych.

Podać przykład wektora $v_4 \in \mathbb{R}$ postaci $v_4 = [4, 5, s]$, który jest kombinacją liniową wektorów $v_1 = [1, 1, 1]$ i $v_2 = [2, 3, 5]$

To zadanie sprowadza się do wyznaczenia takich c_1 i c_2 , żeby pierwszymi dwiema współrzędnymi wektora $c_1v_1 + c_2v_2$ były liczby 4 i 5 odpowiednio. Ale wiemy dobrze, że

$$\begin{aligned} c_1v_1 + c_2v_2 &= c_1[1, 1, 1] + c_2[2, 3, 5] = \\ &= [c_1 + 2c_2, c_1 + 3c_2, c_1 + 5c_2]. \end{aligned}$$

Szukamy zatem takich liczb c_1, c_2 , żeby

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 4 \\ c_1 + 3c_2 = 5 \end{cases} \quad (1)$$

A jeżeli takie liczby znajdziemy, to przyjmiemy $s = c_1 + 5c_2$ i na pewno będzie dobrze.

A ten układ równań liniowych (2) rozwiązujemy w zwykły sposób. Piszemy macierz uzupełnioną

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{array} \right] \quad (2)$$

i przekształcamy ją w dobrze Państwu znany sposób do postaci schodkowej zredukowanej (chyba żeby wcześniej było widać, że układ jest sprzeczny). Poniżej pomijam informację o tym, jaka operacja jest wykonywana, bo wszyscy się tego mogą łatwo domyślić.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \quad (3)$$

Jak się okazało, kombinacja liniowa wektorów v_1 i v_2 ze współczynnikami $c_1 = 1$ i $c_2 = 2$ jest jedyną, jaka spełnia nasze warunki i w takim razie $v_1 + 2v_2 = [4, 5, 12]$ jest jedyną kombinacją liniową wektorów v_1 i v_2 , która jest postaci $[4, 5, s]$, czyli jedyny możliwy wybór s to $s = 12$.