

Zadanie 1.2.a

P.Traczyk@mimuw.edu.pl

18 marca 2020

Proszę Państwa, wysyłam Państwu komentarz do zadania 2.a z pierwszej serii zadań zdalnych. Czy wektor $v_3 = [5, 2, 6]$ jest kombinacją liniową wektorów $v_1 = [1, 1, 1]$ i $v_2 = [2, 3, 5]$?

Rozwiązanie. Zgodnie z definicją kombinacji liniowej jest to to samo, co pytanie, czy istnieją liczby c_1 i c_2 , takie że

$$c_1[1, 1, 1] + c_2[2, 3, 5] = [5, 2, 6].$$

No ale przecież wiemy, że $c_1[1, 1, 1] + c_2[2, 3, 5] = [c_1 + 2c_2, c_1 + 3c_2, c_1 + 5c_2]$. Pytamy więc faktycznie o to, czy istnieją liczby c_1, c_2 , takie że

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 5 \\ c_1 + 3c_2 = 2 \\ c_1 + 5c_2 = 6 \end{cases} \quad (1)$$

Ale to już jest najzwyklejszy w świecie układ trzech równań liniowych z dwiema niewiadomymi c_1 i c_2 . Rozwiązujemy go w zwykły sposób. Piszemy macierz uzupełnioną

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{array} \right] \quad (2)$$

i przekształcamy ją w dobrze Państwu znany sposób do postaci schodkowej zredukowanej (chyba żeby wcześniej było widać, że układ jest sprzeczny). Poniżej pomijam informację o tym, jaka operacja jest wykonywana, bo wszyscy się tego mogą łatwo domyślić.

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 6 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 11 \end{array} \right] \quad (3)$$

Może kogoś dziwić, że nie dokończyłem procesu sprowadzania macierzy do postaci schodkowej zredukowanej, ale nie ma takiej potrzeby. Wystarczy spojrzeć na ostatni wiersz, żeby wiedzieć, że układ równań jest sprzeczny. Zatem wyszło, że wektor v_3 nie jest kombinacją liniową wektorów v_1 i v_2 , bo nie da się tak dobrać c_1 i c_2 , żeby

$$c_1[1, 1, 1] + c_2[2, 3, 5] = [5, 2, 6].$$