

Zadanie 1.1.e

P.Traczyk@mimuw.edu.pl

18 marca 2020

Proszę Państwa, wysyłam Państwu komentarz do zadania 1.e z pierwszej serii zadań zdalnych. Zbadać, czy jest podprzestrzenią liniową w przestrzeni $F(\mathbb{R})$ zbiór

$$X_5 = \{x(t) \in F(\mathbb{R}) : x' = x + 1\}$$

W tym zadaniu symbol x oznacza funkcję zmiennej t , co może się Państwu wydać nieco zaskakujące, bo zwykle funkcję oznaczamy literą f , a *zmienną* literą x . Są jednak ważne powody, żeby użyć takich oznaczeń: ten warunek w nawiasie to jest równanie różniczkowe, w którym niewiadomą jest funkcja x , a niewiadome w równaniach zwykle oznaczamy literą x . Na coś się trzeba zdecydować — albo zapis będzie konsekwentny z punktu widzenia notacji, używanej gdy rozpatrujemy funkcje, albo będzie konsekwentny z punktu widzenia notacji, używanej gdy rozpatrujemy równania. Ten zbiór można też zapisać tak:

$$X_5 = \{x(t) \in F(\mathbb{R}) : x'(t) = x(t) + 1\}$$

Wtedy lepiej widać, że x jest funkcją.

Proszę Państwa, na wykładzie definicja podprzestrzeni nie zawierała jawnie sformułowanego warunku, że wektor zerowy musi do podprzestrzeni należeć. Ale oczywiście tak to jest: wektor zerowy należy do każdej podprzestrzeni. W przestrzeni $F(\mathbb{R})$ wektorem zerowym jest funkcja stała x_0 , taka że dla każdego t mamy $x_0(t) = 0$. Gdyby ten podzbiór był podprzestrzenią, to do niego musiałaby należeć właśnie ta funkcja. Oczywiście $x'(t) = 0$, $x'(t)$ to jest ta sama funkcja stała zerowa. Widać, że ta funkcja nie spełnia podanego równania, bo dla każdego t mamy $x'_0(t) = 0$, $x_0(t) + 1 = 1$, zatem $x'_0(t) \neq x_0(t) + 1$. Jak widać, podzbiór X_5 nie jest podprzestrzenią liniową przestrzeni liniowej $F(\mathbb{R})$.