

Dane: $\sigma \in \Sigma_6 \leq \Sigma_7$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

Znaleźć $|C_{\Sigma_6}(\sigma)|$ oraz $|C_{\Sigma_7}(\sigma)|$.

Przedstawiamy σ jako iloczyn rozłącznych cykli:

$$\sigma = (1,6) (2,4,3) (5)$$

Rozpatrzmy działanie grupy Σ_6 (analogicznie Σ_7) na zbiorze jej elementów przez automorfizmy wewnętrzne.

$$C_{\Sigma_6}(\sigma) = \{g \in \Sigma_6: g\sigma g^{-1} = \sigma\}$$

$$C_{\Sigma_7}(\sigma) = \{g \in \Sigma_7: g\sigma g^{-1} = \sigma\}$$

Zgodnie z Twierdzeniem Lagrange'a:

$$[\Sigma_6 : C_{\Sigma_6}(\sigma)] = \frac{|\Sigma_6|}{|C_{\Sigma_6}(\sigma)|}$$

$$|\Sigma_6| = 6! = 720,$$

Teraz liczymy $[\Sigma_6 : C_{\Sigma_6}(\sigma)]$

$[\Sigma_6 : C_{\Sigma_6}(\sigma)]$ – moc klasy sprzężoności permutacji σ

(**)Dwie permutacje są sprzężone wtedy i tylko wtedy, gdy mają podobne rozkłady na iloczyn cykli rozłącznych, tzn. w obydwu rozkładach występuje po tyle samo cykli tej samej długości.

Czyli moc klasy sprzężoności permutacji σ jest równa ilości różnych permutacji, których iloczyn cykli rozłącznych ma jeden cykl długości 1, jeden cykl długości 2 oraz jeden cykl długości 3.

(.) (.) (.) (.) (.) (.)

Takich permutacji jest: $6 \cdot \binom{5}{2} \cdot 2 = 120$ (wybieram pierwszy element na 6 sposobów, z pięciu pozostałych wybieram 2, pozostałe 3 można w permutacji 3 elementowej ustawić na 2 sposoby)

Zatem: $[\Sigma_6 : C_{\Sigma_6}(\sigma)] = 120$

Ostatecznie: $|C_{\Sigma_6}(\sigma)| = 720/120 = \underline{6}$

Teraz liczymy

$[\Sigma_7 : C_{\Sigma_7}(\sigma)]$: W tym przypadku $\sigma = (1,6) (2,4,3) (5) (7)$

Moc klasy sprzężoności permutacji σ jest równa ilości różnych permutacji, których iloczyn cykli rozłącznych ma dwa cykle długości 1, jeden cykl długości 2 oraz jeden cykl długości 3.

(.) (.) (.) (.) (.) (.)

Takich permutacji jest $7 \cdot 6 \cdot \binom{5}{2} \cdot 2 \cdot (1/2) = 420$ Dlaczego? Wszystko liczymy analogicznie jak w poprzednim przykładzie, tylko dla nas nie ma znaczenia kolejność pojedynczej permutacji np. (1) (2) (a b) (c d e) jest identyczna z (2) (1) (a b) (c d e) stąd dzielenie wyniku przez 2.

Zatem: $[\Sigma_7 : C\Sigma_7(\sigma)] = 420$

Ostatecznie: $|C\Sigma_7(\sigma)| = 5040/420 = \underline{12}$

Czy w Σ_7 istnieje permutacja tego samego rzędu co σ , ale z permutacją σ nie sprzężona?

$\sigma = (1,6) (2,4,3) (5) (7)$, rząd σ wynosi 6 (σ^6 to identyczność)

W Σ_7 istnieje permutacja o rzędzie 6, ale o innym rozkładzie na iloczyn cykli rozłącznych np. $(1,2,3,4,5,6) (7)$, czyli nie jest ona sprzężona z σ .