

EWELINA LUBAŚ, WIOLETA KISIO

ZADANIE: Znaleźć klasy sprzężoności elementów drupy dihedralnej D_{2n} .

Przyjmijmy $D_{2n} = \{1, \varrho, \dots, \varrho^{n-1}, \varepsilon, \varepsilon\varrho, \dots, \varepsilon\varrho^{n-1}\}$, gdzie ϱ oznacza obrót o $\frac{1}{n}$ kąta pełnego, a ε symetrię osiową. W grupie dihedralnej występują elementy typu ϱ^i lub $\varepsilon\varrho^j$. Ustalmy $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Dla każdego $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ zachodzą równości:

$$(\varrho^i)^{-1}\varrho^k\varrho^i = \varrho^{-i}\varrho^k\varrho^i = \varrho^k,$$

$$(\varepsilon\varrho^i)^{-1}\varrho^k(\varepsilon\varrho^i) = \varrho^{-i}\varepsilon\varrho^k\varepsilon\varrho^i = \varrho^{-i}\varepsilon(\varrho^k\varepsilon)\varrho^i = \varrho^{-i}\varepsilon^2\varrho^{n-k}\varrho^i = \varrho^{n-k}.$$

Podobnie, dla każdego $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ możemy zapisać:

$$(\varrho^i)^{-1}(\varepsilon\varrho^k)\varrho^i = \varrho^{-i}\varepsilon\varrho^{k+i} = \varepsilon\varrho^i\varrho^{k+i} = \varepsilon\varrho^{k+2i},$$

$$(\varepsilon\varrho^i)^{-1}(\varepsilon\varrho^k)(\varepsilon\varrho^i) = \varrho^{-i}\varepsilon^2\varrho^k\varepsilon\varrho^i = \varrho^{-i}\varrho^k\varepsilon\varrho^i = \varrho^{-i}\varepsilon\varrho^{n-k}\varrho^i = \varepsilon\varrho^i\varrho^{n-k+i} = \varepsilon\varrho^{2i-k}.$$

Rozpatrzmy dwa przypadki:

1. $n = 2m \rightarrow m + 3$ klasy sprzężoności:

$$\begin{aligned} \{id\}, \{\varrho, \varrho^{2m-1}\}, \{\varrho^2, \varrho^{2m-2}\}, \dots, \{\varrho^{m-1}, \varrho^{m+1}\}, \{\varrho^m\}, \\ \{\varepsilon, \varepsilon\varrho^2, \dots, \varepsilon\varrho^{2m-2}\}, \{\varepsilon\varrho, \varepsilon\varrho^3, \dots, \varepsilon\varrho^{2m-1}\} \end{aligned}$$

2. $n = 2m + 1 \rightarrow m + 2$ klasy sprzężoności:

$$\begin{aligned} \{id\}, \{\varrho, \varrho^{2m}\}, \{\varrho^2, \varrho^{2m-1}\}, \dots, \{\varrho^m, \varrho^{m+1}\}, \\ \{\varepsilon, \varepsilon\varrho, \varepsilon\varrho^2, \dots, \varepsilon\varrho^{2m}\} \end{aligned}$$